Matematiğin (M)izahı

Meşhur Problemler
Edebiyattaki Matematik
Matematiksel Oyunlar



Bilim ve Gelecek Kitaplığı

Ali Törün



Bilim ve Gelecek Kitaplığı

Bilim ve Gelecek Kitaplığı - 44

Matematiğin (M)izahı

Ali Törün

© Bu kitabın yayın hakları
7 Renk Basım Yayım ve Filmcilik Ltd. Şti.'ne aittir.

Birinci Baskı: Ocak 2015

ISBN: 978-605-5888-43-5

Yayıma hazırlayan: Baha Okar
Şekiller: Aslı Can Korkmaz

Baskı: Kayhan Matbaacılık
Davutpaşa C. Güven Sanayi Sitesi B Blok,
No: 244, Topkapı / İstanbul
Tel: 0212.612 31 85

7 Renk Basım Yayın ve Filmcilik Ltd. Şti
Tel: 0216.349 71 72
Caferağa M. Moda C. Zuhal S. No: 9/1, Kadıköy-İstanbul
http://www.bilimvegelecek.com.tr • bilgi@bilimvegelecek.com.tr

Ali Törün

MATEMATİĞİN (M)İZAHI

Ali Törün

1960'da İzmir'de doğdu. Lise öğrenimini İstanbul Maçka Teknik Lisesi'nde tamamladı. 1980-1984 yılları arasında Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü'nde öğrenim gördü. 30 yıl süreyle özel dershanelerde çalıştı.1996-1997 yıllarında *Epsilon* isimli matematik dergisinin editörlüğünü yaptı. 2013'te Ali Nesin'le birlikte kaleme aldığı *Matematikçi Portreleri* isimli kitabı yayımlandı.

Halen Nesin Matematik Köyü'nü Destekleme Derneği Başkanı ve *Matematik Dünyası* dergisi yayın kurulu üyesidir. *Bilim ve Gelecek* dergisinde popüler matematik yazıları yazmaktadır.

İÇİNDEKİLER

Önsöz 9

1. BÖLÜM - MATEMATİK YAZILARI 13
Matematiğİn (m)izahı 15
Matematik öğretimi ne işe yarar? 27
Şeytan doldurur, kanıtlamadan asla! 34
2x2 = 4'ün kanıtı üzerine 42
'Sözsüz kanıtlar' bahçesinde bir gezinti 48
Matematik ve soyutlama 61
Deniz'e mektup 68
Sık sorulan yanlış sorular 74
Bütün tamsayıların toplamı! 82
1+2+3+4+ ⋯ = -1/12 86
Yanlışımı bul! 91
Sezgilerinize güvenebilir misiniz? 97
Mantıklı düşünebiliyor musunuz? 102
Matematiksel semboller 108
Tanrıya adanan matematik: Sangaku 115
Matematik Köyü'ndeki parabol 122
Beslenmenin matematiği 129
Dünyayı değiştiren ders 135
Paul Erdös ya da matematik yapmanın aşkınlığı 140

2. BÖLÜM - EDEBİYATTAKİ MATEMATİK 145
Matematiğin edebiyattaki izleri 147
İvan Karamazov ve Beşinci Aksiyom 154
Düzülke 160

3. BÖLÜM - MEŞHUR PROBLEMLER 167
'Terzi problemi' ve menteşeli parçalanmalar 169
Bir dehanın ayaküstü çözdüğü problem 177
Bir kumarbazın sorusundan olasıllk teorisine... 184
Sonsuzu saymak 190
Böyle otel olur mu? 196
Hangi çözüm daha 'zarif'? 205
Yanlış adrese gönderilen mektuplar 213
Doğru çözüme 'doğru' diyememek! 219
Olasılık sohbetleri 225
Banach'ın kibrit kutusu problemi 232
Newton'un *Arithmetica*'sından bir problem 236
Sylvester'ın pul problemi 240
Euler ve bir diyafont denklemi 245
Eski bir mantık bilmecesi 249
Problemin püf noktası! 254
Problem çözmek güzeldir! 259
Fibonacci yapbozları 265

4. BÖLÜM - MATEMATİKSEL OYUNLAR 271
Eğlenceli bir oyun: Bridg-It 273
Googol oyunu 277
Blöflü bir oyun ya da kumarın matematiği 281
Bu yarışmayı kazanabilir misiniz? 287
Öklid oyunu 292

YANITLAR 299

DİZİN 303

Annem Mediha Törün için...

Önsöz

1990'larda *Bilim ve Ütopya* dergisinde yayımlanan **Matematik Sohbetleri** köşesini heyecanla okurdum. Ali Nesin'in hazırladığı bu köşeyi her ay sabırsızlıkla beklerdim. Bir soru sorulur, sonraki sayıda çözümü yapılırdı. Bir ay boyunca bir soruyla uğraşmanın hoşluğunu, sorunsuz ve sorumsuz boşluğunu yaşardım. Popüler matematiğe olan ilgim Matematik Sohbetleri'yle başlamıştı. Daha sonra Ali Nesin bu köşeyi *Bilim ve Gelecek* dergisi için hazırladı, bu yazıların da okuruydum.

Yıllar sonra hayat bana bir ödül verdi, Matematik Sohbetleri'ni Ali Nesin'den devraldım. Sıkı bir okuru olduğum köşenin artık yazarıydım. Usta bir kalemin bıraktığı yerden devam edecek, ustanın dev tekerleklerinin çiğnediği yolu sürdürecektim. Matematiğin kalbini kırmadan yol almalıydım. Kolay değildi, her bir yazıyla çok uğraştım. Matematik Sohbetleri'nın ruhuna sadık kalmaya çalıştım. Bu güzel yolculuk yaklaşık beş yıldır sürüyor.

İşte bu kitap, Matematik Sohbetleri köşesinde yayımlanan yazılarımdan oluşuyor. Bölümler ve yazılar birbirlerinden bağımsız olduklarından herhangi birinden okumaya başlayabilirsiniz.

Bu kitabı yazma süreci Matematik Köyü'yle başladı diyebilirim. Köy için matematiksel oyuncaklar yaptırıyordum. Birinci bölümde yer alan "**Fibonacci Yapbozları**" ve "**Terzi Problemi**"

yazıları bu oyuncakların arka planındaki matematiği açıklamaya çalışan, fikir babasının Ali Nesin olduğu yazılardır.

Yıllar geçtikçe diğer yazılar geldi. Matematik denizinin uçsuz bucaksız sularında fazla derinlere gitmeden heyecanla yüzmeye başlamıştım. Öylesine büyüleyici ve şaşırtan bir yolculuktu ki, karşılaştığım matematiksel keşifler karşısında kendime sık sık "Kimin aklına gelirdi bu?" sorusunu soruyordum. Bu dönemde kaleme aldığım "'**Sözsüz Kanıtlar' Bahçesinde Bir Gezinti**", "**Matematik Köyü'ndeki Parabol**", "**Matematik ve Soyutlama**", "**Sonsuzu Saymak**", "**Dünyayı Değiştiren Ders**" gibi yazılar matematiğin görkemli ve çekici gücünü anlatmaya çalışan örneklerdir.

Sisler arasından beliren muhteşem bir manzara… Bu cümleyi meşhur problemlerin çözümlerini incelerken kurmuştum. Bir çocuğa bile anlatabileceğiniz basit bir matematik problemiyle yola çıkıp heybetli bir matematiksel kurama ulaşmak… Bir büyük matematikçinin bir problemi çözerken izlediği yol, "Ne inanılmaz bir bağıntı!" şaşkınlığını yaratıyor. Kitabın üçüncü bölümünde yer alan "**Bir Kumarbazın Sorusundan Olasılık Teorisine…**", "**Bir Dehanın Ayaküstü Çözdüğü Problem**", "**Sylvester'ın Pul Problemi**", "**Euler ve Bir Diyafont Denklemi**" başlıklı yazılarda problemlerin çözümlerindeki matematiksel yaratıcılığın mükemmel örnekleriyle karşılaşabilirsiniz.

Matematiğin ferahlığına sığınmak isteyecek okurun ilgisini çekebilecek birçok yazının olduğunu düşünüyorum bu kitapta. Ama öte yandan matematiğin kendisinin dışında, matematikle kurduğumuz ilişkiye dair yazılara da yer verdim. "**Matematik Öğretimi Ne İşe Yarar?**", "**Sık Sorulan Yanlış Sorular**", "**Bütün Tamsayıların Toplamı!**" başlıklı yazılar, paylaşmak istediğim bir derdim, anlatmak istediğim bir meselem olduğundan kaleme alınmıştır. Derslerde öğrencilerimin veya çevremdekilerin sorularına dilim döndüğünce yanıt verme çabasıdır. Hatta bu yazılar, matematikle ilgili toplumda yer etmiş olan yaygın bakış açısına ve kimi çarpıtmalara karşı bir çığlık olarak da görülebilir.

Bir kâğıdı on küçük parçaya bölsem ve her birinin üzerine göremeyeceğiniz şekilde on farklı pozitif sayı yazsam, kâğıtları çevirerek on sayının en büyüğünün hangisi olduğunu tah-

min edebilir misiniz? Ama bir koşulla, daha önce çevirdiğiniz kâğıtlardaki sayılardan birinin en büyük sayı olduğunu söyleyemiyorsunuz. "**Googol Oyunu**" isimli böylesi basit bir sorunun diferansiyel ve integral hesaba kadar giden bir çözümünün olabileceğini düşünebilir miydiniz? Matematiksel düşünmenin sürpriz zarafeti olarak nitelendirebileceğimiz bu türden matematiksel oyunlarla ilgili yazıları dördüncü bölümde bulabilirsiniz.

Okuyacağınız yazıların bazılarında popüler çerçevede matematik yapmanın zorluğunu yaşadım. Yazılar ilgi çekmeliydi, belli bir matematik düzeyini aşmamalıydı, ama matematikten de ödün vermemeliydim. Bu anlayışla yazmaya çalıştım, yazıların kapsamı yüzünden kanıtlamadan verdiğim bazı teoremler için okurun ve matematiğin affına sığınıyorum. Gözümden kaçan olası hataları a_torun60@hotmail.com adresine bildiren okurlara şimdiden minnettarlığımı ifade etmek isterim.

Bu kitaptaki yazılar çok kişinin çok kıymetli desteği sayesinde yazılmıştır.

Matematik ve yazma hakkında kendisinden çok şey öğrendiğim Ali Nesin dostum, ustamdır. Bazı yazılar onunla yaptığım sohbetlerde öğrendiklerimin izini sürerek kaleme alınmıştır. Ali Nesin'e sonsuz şükranlarımla…

Kardeşim Elif Törün'ün dünyalar dolusu emeği olmasaydı eğer, belki de bu kitabı elinizde tutuyor olamayacaktınız. Matematiğe ve edebiyata gönül düşürmüş bir tıp doktoru olarak her yazımı satır satır okudu. Öylesine uyarı ve düzeltmelerde bulundu ki birçok yazıyı tedavi ederek ayağa kaldırdı, iyileştirdi. Sağ olasın canım kardeşim. Çok öptüm!

Yıllar öncesindeki öğrencim Cem Uran, takıldığım her yerde keskin zekâsıyla hep yanımdaydı. Araştırdı, öneriler getirdi, çeviriler yaptı. Yurtdışında eğitimini sürdüren bir elektronik mühendisi olmasına karşın, onun gözlerindeki ışıltı, matematik tutkusu, hiçbir karşılık beklemeksizin harcadığı emek bu kitaba fazlasıyla yansıdı. Cem Uran'a minnettarım, sonsuz teşekkürler…

Emeğini esirgemeden doğaçlama ve mükemmel çevirileriyle yazılarıma büyük katkı sağlayan Fırat Güncü'ye; sabırla ve titizlikle nitelikli çeviriler yapan Deniz Öztürkçü'ye; hem İngiliz-

ce hem de Türkçe öğretmenlerim olan kızlarım Aslı ve Oya'ya; birçok yazımı hevesle okuyup değerli önerilerde bulunan Oğuz Kinşan'a çok teşekkür ederim.

Aslı Can Korkmaz kitapta yer alan şekilleri emek emek çizerek bana çocuk sevinçleri yaşattı. Onun o cömert kalbini sevgi ve minnetle selamlıyorum.

Dizgi ve mizanpajla günlerce uğraşan, yaptığım dozu yüksek düzeltmeleri sabırla karşılayan Baha Okar'a ve beni Bilim ve Gelecek ailesine davet eden Ender Helvacıoğlu'na sevgi ve saygılarımı ileterek çok teşekkür ederim.

"Bu yazı olmuş mu, bakar mısın?" dediğimde, her defasında aklı ve gönlüyle yazdıklarımı okuyup, çok değerli eleştirilerde bulunan hayat arkadaşım Olcay Törün'e buradan bir kez daha sevgi ve teşekkürlerimi iletmek isterim.

Önsözün sonsözü: Bu kitap, çağlayana düşen bir damlanın sesi olabilirse ne mutlu bana!

Ali Törün
10.10.2014 - Karşıyaka

1. Bölüm

Matematik Yazıları

MATEMATİĞİN (M)İZAHI

Matematikle ilgili fıkra ve şakaları çok severim. Bu şakalarda, komikliğin ötesinde matematiksel düşünceye ve matematiğin dünyasına ait ipuçları vardır. Bir anlamda mizahla, matematiğin izahı yapılır. Bu yazıda hem okurun hoşgörüsüne, hem de "gülme kapasitesi gülendedir, gülünen de değil" sözüne sığınarak, fıkra ve şakalarla matematik mizahını incelemeye çalışacağım.

Matematikçilerin yaşadığı dünyayla gerçek dünya arasındaki aykırılığı anlatan "dalgın matematikçi" fıkraları içinde en hoşuma gideni Amerikalı matematikçi Norbert Wiener'ın (1894-1964) kahramanı olduğu fıkradır:

Bir gün, Wiener ailesi yeni bir eve taşınmaya karar verir. Bayan Wiener, yeni evlerinin adresini unutabileceğini düşündüğü kocasının eline adresin yazılı olduğu kâğıdı tutuşturur. Wiener, "Bu kadar da önemli bir şeyi unutmam canım" karşılığını verir, ama yine de kâğıdı alır, cebine koyar. Daha sonra aynı gün, üniversitede bir arkadaşı ilginç bir problem sorar Wiener'a. Problemle uğraşmak için bir yerlerden kâğıt bulmaya çalışan Wiener, cebinden çıkardığı kâğıda bazı denklemler yazar. Yazacaklarını bitirdiği zaman da kâğıdı buruşturup atar. Aynı akşam yeni evine dönerken adresi hatırlamaya çalışır, hemen cebindeki kâğıdı aramaya başlar, ama bulamaz. Wiener'ın başka seçeneği kalmamıştır, eski evinin yolunu tutar, aklı arkadaşının sorduğu problemdedir. Tam da o esnada

küçük bir kızın oradan geçtiğini görerek "Hey, küçük kız" diye seslenir. "Wiener'ların evi nerede biliyor musun?" Kız yanıtlar: "Tamam babacığım, annem de beni seni almam için yollamıştı".

Matematik mizahının önemli bir bölümü matematiğin dünyasıyla, gerçek dünyanın farklılığından, uygunsuzluğundan, hatta çarpışmasından ortaya çıkmıştır. Matematik dünyası tamamıyla soyut bir dünyadır. Bu dünyada yaşayan varlıklar, sayılar, eğriler, fonksiyonlar, diziler gibi matematiksel nesnelerdir. N. Wiener'ın ev adresinin yazılı olduğu kâğıt bu nesneler arasında yoktur. Matematikçi, kendi nesneleriyle matematiksel gerçeği keşfetmeyi amaçlar, yaptığı çalışmaların doğruluğunu fiziksel gerçeğin mantığına başvurarak onaylama yoluna gitmez. O, matematik yaparken başka bir dünyanın insanıdır. Matematiksel çalışmaya yoğunlaşmışsa bütün enerjisini probleme yönelttiğinden, geriye kalan her şeyi bir kenara bırakır, onun için o an, zaman ve mekân kaybolur. Bu durum N. Wiener gibi kendi dünyasında yaşayan, günlük sorunlarla baş edemeyen bir matematikçi tipinin gelişmesine yol açar ki bu da mizah için en elverişli ortamdır. Kuşkusuz, "dalgın matematikçi" fıkraları gerçeğin bir bölümünü anlatırlar, abartılıdırlar ama matematiksel çabanın ruhunu yansıtırlar. Bu türde klasiklerden biride Nobert Wiener'in yolda bir öğrencisiyle karşılaştığı ve uzun bir teorik tartışmaya girdiği fıkradır. Tartışmanın sonunda öğrencisine sorar, " Ne tarafa gidiyordum ben?". Öğrenci, "Şu tarafa gidiyordunuz hocam" karşılığını verince "İyi" der, "Demek öğle yemeğini yemişim".

Matematiğin soyut yapısı günlük konuşma dilinde birçok kişi için mizah konusudur. Bu espriler, daha çok matematiği umursamayıp bilmemekle övünenler ya da matematiksel düşüncenin hayatın pratiğine uymadığını savunanlar tarafından ortaya atılır. Bu şakaların öznesi matematikçilerdir ve diğer bilim insanlarıyla karşılaştırılırlar. Genellikle fizikçiler ve mühendisler tarafından anlatılan bu fıkralarda matematikçi soyut çözümler üreten, sorunu çözemeyen kişidir. Renteln ve Dundes'e göre, mühendisler denklemlerin gerçek dünyayı oluşturduğunu düşünür, fizikçilerse gerçek dünyanın denklemleri oluşturduğunu. Matematik-

çiler ise aradaki bağlantıyı kuramaz ya da bir matematikçinin (saf matematikçinin) denklemlerle fiziksel dünya arasındaki bağ umurunda değildir. Bu fıkralar matematikle dalga geçmekle birlikte matematiksel düşüncenin açıklanması bakımından ilginçtir. Bu konuda çok bilinen bir fıkra:

Bir mühendis, bir fizikçi ve bir matematikçi bir otelde gecelerler. Mühendis duman kokusuyla uyanır, hole çıkar ve bir de bakar ki yangın var. Odasındaki kovaya doldurduğu suyla yangını söndürdüğünü düşünerek yatağına geri döner. Daha sonra fizikçi de aynı kokuyla uyanır, koridora çıkar aynı yangınla karşılaşır, alt kata inerek yangın hortumunu bulur. Hesap yapmaya başlar. Alevlerin yayılma hızını, hortuma olan uzaklığını, suyun basıncını ve eğimini hesaplayarak en az enerji ve su harcayarak yangını söndürdüğünü düşünür, yatağına geri döner. Son olarak matematikçi uyanır ve yanık kokusunu fark eder. Koridora çıktığında o da alevleri görür ve yangın hortumunu bulduğunda bir an düşünür, "Çözümü buldum!" diye bağırarak yatağına geri döner.

Matematikçilerin bir teoremin kanıtını yaparken daha önce kanıtlanmış teoremleri referans göstermeleri olağandır, ama bu durum matematikçi olmayanlar tarafından bir problemi daha önce çözülmüş bir probleme indirgemek olarak algılanır ve bu çoğu zaman yanlıştır. Bunun bir örneğini aşağıdaki fıkrada görebiliriz.

Bir matematikçi ve bir mühendis ıssız bir adaya düşmüşlerdir. Adada her ikisinin de üzerinde birer hindistan cevizi olan iki ağaç görürler. Mühendis ağaca tırmanır, hindistan cevizini koparıp onu yer. Matematikçi de diğer ağaca tırmanır, hindistan cevizini koparır, aşağıya inip önceden mühendisin çıkmış olduğu ağaca tırmanıp diğer ağaçtan kopardığı hindistan cevizini oraya bırakır, ardından da şu sözü söyler: "Şimdi, problemi daha önce çözümünü bildiğimiz hale getirdik".

Günlük hayatın içindeki problemlere getirilen çözümler arasında matematikçinin yaptığı çözümün genellikle en şık çözüm olduğu, ama pratikte sorunu çözmediği düşünülür. Bu düşünce birçok yönden tartışmaya açık olmasına karşın bir bölümüyle

gerçeği yansıtır; çünkü bir pür matematikçi için yaptığı çalışmaların uygulanabilirliği umurunda değildir, pratikte bir karşılığı var mıdır diye düşünmez. Gerçekler dünyasının sorunlarına da soyutlamanın penceresinden bakarak çözüm getirir. Tam da gerçeği yansıtmayan bu yargıyı ifade eden bir fıkra:

Bir çiftçinin amacı en kısa uzunluktaki çitle en büyük alanı çevrelemektir. Bu iş için bir mühendis, bir fizikçi ve bir matematikçiden yardım ister. Mühendis, çiti daire haline getirir ve bunun en uygun düzenleme olduğunu savunur. Fizikçi çiti düz bir çizgi biçimine getirir, bu çizginin sonsuz uzunlukta olabileceğini ve yer küreyi ikiye böleceğini söyleyerek en büyük alanın bu durumda oluşacağını iddia eder. Matematikçi onlara güler, kendi etrafına kısa bir çit çeker. Kendisinin içinde bulunduğu alanı sınırlayan bu kısa çitin aynı zamanda çitin dışında kalan bütün yeryüzü parçasını da sınırladığını söyler; böylece kısacık bir çit parçasıyla neredeyse tüm yeryüzünü çevrelemiştir.

Sıradaki fıkrada matematikçi her zamanki gibi kusursuz bir mantık uygular ama gerçekler dünyasındaki bir olayı genelleme konusunda başarısızdır; çünkü o kesinlik ister. Kesinliğin olmaması, onun için gözleri kapalı yürümek kadar rahatsız edicidir. Matematik, yaklaşık doğruyu değil tam doğruyu amaçlar. Gerçekler dünyasındaysa çoğu zaman tam doğruyu saptamak olanaklı değildir. İki dünya arasındaki bu fark, matematikçilerin kılı kırk yaran titizliği aşağıdaki fıkrada olduğu gibi mizah konusu olmuştur:

Bir matematikçi, bir fizikçi ve bir mühendis İskoçya'da trende seyahat etmektedirler. Trenin penceresinden siyah bir koyun görürler. "İşte!" der mühendis "İskoçya'daki koyunların siyah olduğunu görüyorum". "Hımm" der fizikçi, "Bazı İskoç koyunlarının siyah olduğunu söylüyorsun sanırım". "Hayır" der matematikçi ve gözlerini dua eder gibi gökyüzüne çevirerek mırıldanır: "Bizim bütün bildiğimiz, İskoçya'da en az bir koyun olduğu ve bu koyunun en az bir tarafının siyah olduğudur."

Matematikçilerin çabuk düşündüklerini, hızlı bir biçimde sonuca vardıklarını, bir espriyi çok çabuk anladıklarını, mono-

tonluktan sıkıldıklarını, çoğu zaman dünyevi şeylerin dışında yaşadıklarını anlatmaya çalışan güzel bir fıkrayı yorumlamadan yazıyorum. Tıpkı şairin " Bir şiiri elden geçirdim/ Başka bir şiir çıktı içinden" dizelerindeki şiire benzeyen bir fıkra:

Bir mühendis, bir fizikçi ve bir matematikçi kendilerini herkes tarafından bilinen çok yaygın bir fıkranın içinde bulurlar. Bazı gözlemler ve kabaca hesaplamadan sonra mühendis durumun farkına varır ve gülmeye başlar. Bir kaç dakika sonra fizikçi durumu anlar ve mutluluk içinde kıkırdar, çünkü bir yayın yapmak için yeterli deneysel kanıta sahip olmuştur. Bir de bakarlar ki matematikçi ortada yok; çünkü matematikçi bir fıkranın öznesi olduğunu derhal gözlemlemiş, benzer fıkralardan hareketle ortada tekrarlanan mizahi bir durumun olduğu sonucuna hızla varmış; bu fıkrayı başka diğer sonuçlara ulaşmak için önemsiz ve bayağı bularak fıkranın içinden çıkıp gitmiştir.

Matematik mizahında birçok şaka ve espriyi anlayabilmek için matematik bilgisi gerekir. Matematik diline hâkim olmayan birisi bu şakalardaki detayları göremez. Bu yazıda bu tür şakalara pek değinmemeye çalıştım ama anlayabilmek için orta öğretim matematik bilgisinin yeterli olacağı çok bilinen, beğendiğim iki fıkrayı yazmak isterim. İlk fıkra kadınların matematikte başarılı olamadıkları önyargısına feministçe bir itiraz olarak görülebilir:

Bir matematikçiyle bir mühendis bir barda içki içmektedir. Mühendis, ortalama bir kişinin temel matematik hakkında fazla bir şey bilmediğinden söz etmektedir. Matematikçiyse bu görüşe katılmaz ve insanların çoğunun matematikten önemli ölçüde haberi olduğunu savunur. Tartışmanın bir yerinde mühendis tuvalete gitmek için masadan ayrıldığında matematikçi hemen garson kızı çağırır. Arkadaşı döndüğünde kendisini çağıracağını ve bir soru soracağını kıza bir kaç dakika içinde anlatır. Garson kızdan yapmasını istediği tek şey kendisine sorulan soruya "x küp bölü üç" demesidir; kız "Nasıl, ne?" "Anlayamadım" karşılığını verir ve "üç küp bölü?" şeklinde tekrarlamaya çalışır. Matematikçi onu düzeltir ve "x küp bölü üç" dedirtecek biçimde tekrarlar. Kız "x küp bölü üç" diye mırıldanarak uzaklaştığında mühendis masaya döner ve tartışmaya kaldıkları yerden devam ederler. Sonunda matematikçi konuştuk-

ları konu üzerine bahse girmeyi teklif eder; garson kızı çağırıp bir integral sorusu sormayı önerir, mühendis gülerek bunu kabul eder. Kızı çağırırlar; matematikçi, kıza "x karenin integrali nedir?" diye sorar. Garson kız "x küp bölü üç" diye cevaplar ve arkasını dönüp uzaklaşmak üzereyken omuzlarının üzerinden bir bakış fırlatarak ekler, "artı c".

Aşağıdaki fıkrada koşullu düşünmenin yanlış, hatta "trajik" sonuçlara yol açabileceğinin matematiksel bir örneği verilmektedir. Ayrıca bu fıkra "türevi kendisine eşit fonksiyonlar" cümlesine de bir itiraz gibidir:

Bir gün sinx, lnx, x^2, 2^x ve e^x fonksiyonları bir kafeteryada oturmuşlar, sürekli ama türevsiz fonksiyonların dedikodusunu yapıyorlarmış. Tam bu sırada sinx, kapıya bakarak telaşla bağırmış:"Dikkat, türev geliyor, kaçın!". Fonksiyonların kimisi sandalyelerin altına, kimisiyse mutfağa saklanmış, ama e^x hiç istifini bozmamış. Türev ağır adımlarla içeri girmiş ve e^x'e "Ne o, sen benden korkmuyor musun?" diye sormuş. e^x kendine güvenen bir tavırla,"Hayır, ben e^x'im, bana bir şey yapamazsın" karşılığını vermiş. "Yaa" demiş türev, "Peki benim x'e göre türev alacağımı kim söyledi sana?" sorusunun ardından y'ye göre türev alarak e^x'i yok etmiş.

Matematik fıkraları bize, bir matematikçinin kimliği, matematik kültürü ve hatta matematiksel düşünmenin yapısı hakkında bazı küçük bilgiler veriyor. Bu fıkralar, elbette mizahın yapısı gereği abartılıdır, aşkındır ama matematiğin ne olduğunu ve diğer akademik disiplinlerle olan farkını renkli bir biçimde anlatması bakımından önemlidir.

Kuşkusuz matematik mizahı sadece fıkralardan ibaret değil, bu alanda daha birçok şaka, espri ve karikatürler yer alıyor.

Matematiksel şakalar

Matematiksel şakaların birçoğu sayılar kuramı, fonksiyonel analiz, topoloji gibi matematiğin farklı alanlarına aittir. Meraklıları için matematik dünyasında keşfe çıkabilmenin ilk adımı olabilecek bu esprilerin bir bölümü soru yanıt biçimindeki bilmecelerle karşımıza çıkar. Matematiğin alt dallarıyla ilgili olan bu şakaları anlayabilmek için matematiksel bilgi gerekir. Bu ya-

zıda böylesi birkaç şakaya değineceğim, tabii matematikle ilgili bazı popüler bilgileri vererek.

Geometrik topolojinin incelediği bölümlerden biri olan iki şeklin veya iki cismin birbirine"dönüşümü" birçok şakanın konusu olmuştur. Bir üçgenle bir çember, kulplu bir kahve kupasıyla bir simit topolojik olarak eşyapılıdır. Islak kilden yapılmış kulplu bir kahve kupasının parçalanmadan eğilip bükülerek, düzleştirilip bir simit şeklini alması topolojik bir dönüşümdür ve bu dönüşümün gerçekleşmesi kahve kupasının kulplu olmasına bağlıdır. Buradan üretilmiş bir espride kahve içerken simit yiyen bir topolojistin kahve kupasının kulpunu tutarken, kupanın simide dönüşümünü açıklayamayacağı anlatılır. Bu türdeki şakalar matematik kültürünün bir parçasıdır ve bu kültüre ait ipuçları verirler.

Birçok çeşitlemesi olan "Bir ampulü değiştirmek için kaç matematikçiye, kaç mühendise, kaç fizikçiye gerek vardır?" gibi soruların matematikle ilgili değişik uyarlamaları yapılmıştır:

Soru: Bir ampulü değiştirmek için kaç topolojiste gerek vardır?

Yanıt: Fark etmez, nasıl olsa bir topolojist onu düğüm haline getirecektir.

Soru: Kaç sayı kuramcısı gerekir?

Yanıt: Bu sayı bilinemez, ancak bu sayının kusursuz bir asal sayı olduğu sanısı ünlü bir matematikçi tarafından ifade edilmiştir ve bu sanı henüz kanıtlanamamıştır.

Soru: Kaç geometrici gerekir?

Yanıt: Sıfır, çünkü bu iş pergel ve cetvelle yapılamaz.

Soru: Kaç analizci gerekir?

Yanıt: Üç. Biri ampulü değiştirmenin en az bir yolu olduğunu (Varlık Teoremi), ikincisi ise ampulün tek biçimde takılabileceğini kanıtlamak için (Teklik Teoremi); diğeri de bu ampulün takılmasına ait bir algoritma geliştirmek için.

Soru: Kaç matematikçi gerekir?

Yanıt: 0,999999…

Bu şaka, 0,999999… = 1 eşitliğinin doğruluğundan kuşku duyanlarla dalga geçmenin yanı sıra, matematiğin tek başına ya-

pılan bir uğraş olduğunu da anlatır. Öte yandan bu espri yukarıda topolojist, sayı kuramcısı, analizci, geometrici gibi matematikçiler için verilen yanıtlarla çelişiyor gibi görünse de mizahta mutlak tutarlılığı aramak doğru olmasa gerek. Bunun güzel bir örneği aşağıdaki soruda.

Soru: Bir ampulü değiştirmek için kaç ampul gerekir?

Yanıt: Bir, eğer bu ampul kendi Gödel sayısını biliyorsa.

Bu şaka, matematikte doğruluğu ya da yanlışlığı kanıtlanamayan önemelerin olduğunun kanıtının yapıldığı "Gödel'in eksiklik teoremleri"ne bir göndermedir. Gödel, adına "Gödel sayıları" denilen her matematiksel tümceye, her ime bir sayının karşılık getirilebileceğinin olanaklı olduğunu göstererek matematiğin çelişkisiz olduğunun kanıtının yapılamayacağını kanıtlamıştır. Eksiklik teoremleri matematiğin temellerini sarsmıştır. Bu şakanın devamı olarak bir tavuğun yolun karşısına geçmesiyle ilgili olarak şu soru sorulur: Tavuk neden yolun karşısına geçti? Gödel'in eksiklik teoremleri'ne göre yanıt şöyledir: Tavuğun yolun karşısına geçip geçmediği kanıtlanamaz.

Tavuğun yolun karşısına geçip geçmediği kanıtlanabilir mi? Bilemem! Ama matematikte, kanıt olmadan bırakın karşıdan karşıya geçmeyi adım atmanın bile olanaksız olduğu çok iyi bilinir. Kanıt matematiğin hijyenidir ve kanıtın her aşamasının geçerliliği çok önemlidir. Matematik tarihine bakıldığında kimi ünlü matematikçilerin bile yaptıkları kanıtlarda gerekli titizliği göstermediği görülür. Birçok matematikçinin kanıtı, incelemeler sonunda saptanan hatalar nedeniyle geçersizleşmiştir. Matematikte kanıt bu kadar önemliyken, matematiğin günlük kullanımında bu titizliğe rastlamak her zaman mümkün olmamaktadır. Aşağıdaki şakalarda, daha çok amatör matematikçilerin ve kimi akademisyenlerin ders verirken matematiğin ihlaline yol açan faullü "kanıt teknikleri" sıralanmıştır.

Nasıl kanıtlamalı? Ders verenler için rehber

Erteleme yoluyla kanıt: "Bunu dersin ilerleyen bölümlerinde kanıtlayacağız."

Ayartma yoluyla kanıt: "Kendinizi bunun doğru olduğuna inandırın."

Savsaklama yoluyla kanıt: "Okuyucu rahatlıkla detayı anlayacaktır."

Örnek verme yoluyla kanıt: "Genel kanıtın vermek istediği fikri n = 2 durumu çok iyi anlatıyor."

Erişilemeyen literatüre referans vererek kanıt: "Slovenyalı Filoloji Topluluğu'nun 1883 yılındaki anı kitabında bu teoremin bir sonucu bulunabilir."

Gözdağı, yıldırma yoluyla kanıt: "Önemsiz."

Seçkin otorite yoluyla kanıt: "Dün akşam telefonda Robert Langlands'la konuştum, Galois gruplarıyla otomorfik formlar arasında bir denkliğin olduğunu söyledi."

Matematikte geçmişte yapılmış çalışmaların referans gösterilmesi yoluyla kanıt: "Matematikçilerin uzun ve yılmayan çalışmaları sonucunda karşı bir örnek bulunamadı."

Şekil ve şema kullanarak kanıt: Örnek yoluyla kanıtın biraz daha ikna edici olanıdır. Savsaklama yoluyla birlikte çok iyi gider.

Coşkulu el sallama yoluyla kanıt: Derste veya seminer düzeninde iyi işler.

Matematiği öğretenlerin bu "ihlallerine" karşılık, öğrenenler de matematik ödevlerine ilişkin ihlallerini zaman zaman matematik diliyle izah etmişlerdir. Bu bölümde öğrencilerin ödev yapmama mazeretlerinden örnekler vereceğim. Ödev, adı üstünde bir otoritenin yaptırımıdır aslında. Öğrencilere verilen birçok ödevde gönüllülük yok denecek kadar azdır. Bütün bunların üstüne matematikle arası iyi olmayan bir öğrenciye verilen matematik ödevi o öğrenci için bir işkenceye dönüşür, matematiğin dünyasıyla gerçekler dünyasının çatışması başlar. Her iki dünyada yaşamanın zorluğu içinde olan öğrenci, birçok mazeret üretir. **Ödev yapmamanın esprili matematiksel gerekçelerinden bazı örnekler:**

- Ödevimi yaparken bir tamsayıyı yanlışlıkla sıfıra böldüm, kâğıdım bir anda alev aldı.

- Bir kahve ve simit molası verdim, ama gecenin kalanında hangisini hangisine bandıracağıma karar veremedim.

- Ödev kâğıtlarıma asimptotik olarak yaklaşıyor ama dokunamıyordum.

- Ödevimi çekmeceye kilitledim ama dört boyutlu bir köpek geldi, onu yedi.

- Teoremi kanıtlayabilirdim ama kanıtı yazacak yerim yoktu. (Fermat'nın Büyük Fermat Teoremi'nin kanıtı için çalışma kâğıtlarından birine yazdığı "Kanıtı yazacak yerim yok." notuna bir gönderme)

- Ödevimi bir Klein şişesine koyduğuma dair yemin edebilirim ama onu bu sabah bulmadım.

- Carl Friedrich Gauss'un doğum gününü kutladığımdan zamanım olmadı.

- Dünya Kupası maçlarını izliyordum, topun yakınsadığı noktayı bulmaya çalışırken ekrana kilitlendim.

- Kanıtını yapmakta takıldığım teorem için *Matematik Dünyası* dergisine baktım gülmekten ödevimi tamamlayamadım.

Farklı yayınlar ve internet ortamından derleyerek yukarıda sıraladığım mazeretlerin sonuncusunu bir öğrencimin esprisinden esinlenerek ben ekledim. Sözü, *Matematik Dünyası* dergisindeki mizaha getirmek istiyorum. Yarı akademik nitelikte olan, matematiğin hemen her alanına ait derinlemesine yazılarla dolu bir dergide nasıl olur da mizah yapılır? 2003-2013 yılları arasında dergiyi okuyanlar bu sorunun yanıtını çok iyi bilir. Halkalar, sıralamalar, sonsuz sayılar, çizgeler, seçim beliti, türev gibi kuramsal matematiğin en temel konuları akıcı ve esprili bir dille anlatılır. Oldukça soyut ve teorik bir konunun bir yerinde adeta birisi sizi gıdıklar, gülmeye başlarsınız. Okur, matematiksel nesnelerin matematiği sulandırmadan yapılan mizahi betimlemelerini okumanın keyfini sürer, yapılan tam anlamıyla matematiğin (m)izahıdır. Eğlenceli matematik bu olsa gerek! Ali Nesin'in kaleminden çıktığını zannettiğim bu espri ve betimlemelerden bazılarını alıntılıyorum: "Sayfanın en altına çizdiğimiz bu eğriye literatürde -çok affedersiniz!- sikloid denir.", "Fonksiyonların süpnormunun sonsuz olabilmesi bazı hassas ruhları rahatsız edebilir." "Acaba bu en gıcır sonlu küme maksimal bir sonlu küme mi?", "f sıralamaya saygı duyuyor".

Ali Nesin'in editörlüğü döneminde *Matematik Dünyası*'nın "Okurlardan" köşesine göz attığınızda da tam bir mizah şöleniyle karşılaşırsınız. Okurlardan gelen sorular ve editörün yanıtlarına örnekler:

Soru: *Hocam, tek sayıların olmadığını kanıtladım. Bu konuyu uluslararası dergilerde yayımlamam gerekiyormuş. Onun için size gönderdim. Yardımcı olursanız sevinirim.*

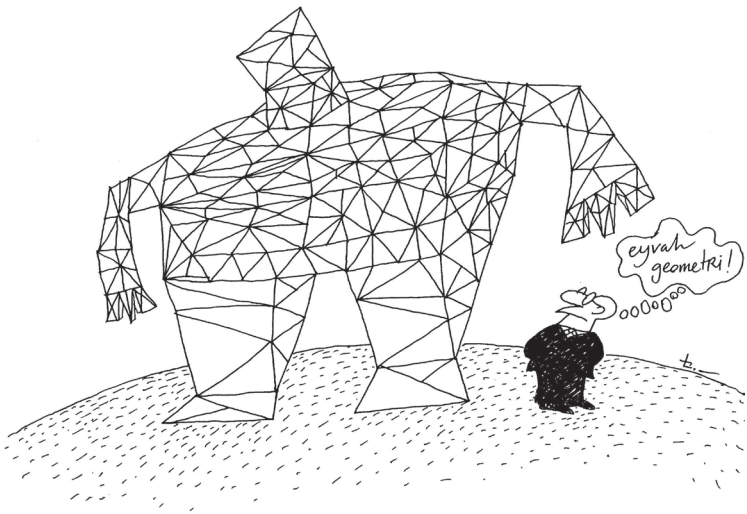
Yanıt: Şimdi de çift sayıların olmadığını kanıtla da MD'nin kapısına kilit vuralım.

Soru: *Sanırım 5 yıldır uğraşıp kanıtlayamadığım Goldbach sanısını bu sefer kanıtladım. Size yolluyorum. İnceleyip beni doğru ya da yanlış olduğu konusunda bilgilendirmenizi rica ediyorum.*

Yanıt: Kanıtınız sadece iki sayfa olduğundan yanlıştır.

Soru: *0 = 1 eşitliğini ispatlayarak matematiğin çelişkili olduğunu gösterdim. Şimdi ne yapayım?*

Yanıt: Fiziğe el atıp başımıza taş yağmayacağını kanıtla.



Soru: *29'un ikilik tabanda asal olmadığını gösterdim. Bu önemli bir buluş mudur?*

Yanıt: Asallık tabandan bağımsız bir kavramdır. Buluşunuz önemli olmasına önemli de, bir kusuru var, yanlış…

Matematik Dünyası'nda yapılan mizah, alıntıladığım bu şakalarla sınırlı değildi. Dergide mizahın en önemli ismi karikatürist Tayfun Akgül'dü. Uluslararası bilim dergilerinde de karikatürleri yayımlanan Tayfun Akgül, *Matematik Dünyası* için çizdiği karikatürlerle matematik (m)izahından çok güzel örnekler vermiştir.

Matematik ve mizah… Her iki etkinlik de soyutlamanın ürünü. Mizah matematik dünyasını soyutluyor, matematik ise insanın en mükemmel soyutlama uğraşlarından biri. Matematiğin dünyası ile gerçekler dünyasının çarpıştığı noktada mizah sahne alıyor ve bizlere her iki dünyanın güzelliklerini görme olanağını sağlıyor.

KAYNAK

Paul Renteln, Alan Dundes, *Notices of the American Mathematical Society*, 2005, Volume 52, Number 1.

MATEMATİK ÖĞRETİMİ NE İŞE YARAR?

Tahtada basit bir sayı problemi ve çözümü vardı: İki asal sayının toplamı 103 ise farkları kaçtır? Problemin çözümünde çok bilinen bir akıl yürütmeyi kullanmıştık. 103 tek sayı olduğuna göre bu iki asal sayının ikisi de tek sayı olamaz. Biri tek, diğeri çift sayıdır. O halde asal ve çift sayı olan sadece 2 olduğundan, bu sayılardan biri 2, diğeri 101'dir. Problemin çözümünü bu şekilde yaptıktan sonra öğrencilerimden biri, "Ne kadar güzel bir soru" dedi. Ben de onaylayarak, "Çok basit, ama zarif bir kurgusu var" karşılığını verdim. Matematiğin böylesi güzelliklerle dolu olduğunu söyledim, ama tam o sırada diğer bir öğrencim farklı düşündüğünü dile getirmeye başlamıştı bile: "Ben güzel olan bir şey göremiyorum, sizlerin bu kadar etkilenmenize de şaşırıyorum doğrusu, ortaokuldan bu yana kendime hep soruyorum: Niye matematik öğreniyoruz, matematik ne işe yarıyor?" Yıllardır, hemen her girdiğim sınıfta bu sorularla karşılaştığımdan böylesi bir tepkiye yabancı değildim. Daha önceden olduğu gibi bu kez de matematik ne işe yarar sorusuna, müzik ne işe yarar, şiir ne işe yarar gibi sorularla ironik bir yanıt verdim. Matematiğe, "Ne işe yarar?" penceresinden bakmanın doğru olmadığını söyledim, zil çaldı, ders bitti. Teneffüse çıkarken kurdu-

ğum birkaç kaçamak cümlenin öğrencimi tatmin etmediğini fark etmenin huzursuzluğunu yaşıyordum. Bu yüzden, hep yazmayı düşündüğüm bu satırları kaleme alma ihtiyacını her zamankinden daha çok hissederek, öğrencimle konuşurcasına düşünmeye başladım.

Öğrenciler matematikten neden yakınırlar?

Bu soruya farklı yanıtlar verilebilir, ama öğrencileri matematikten uzaklaştıran en önemli neden, ülkemizdeki matematik öğretiminin matematiğin ruhuna uymayan yanı olsa gerek. Ülkemiz eğitim sisteminin ezberci, bellemeye yönelik yapısı, öğrencileri matematikle uğraşının gereksizliği sonucuna götürüyor. Bu yüzden "matematiğe ne gerek var"a kadar giden bu tepkileri yadırgamıyorum. Birisine bir konuyu "Sorma, yalnızca öğren." diyerek anlatmanın dinleyen için ne denli sıkıcı olacağını belirtmeye gerek yok sanırım. Keşfetmenin, anlamanın tadını alamayan birçok öğrenci matematiğin güzelliğini göremeyip, matematiği salt pratik yararlılık olarak ele alıyor. Öğrencilerin böylesi bir sonuca ulaşmalarında, "Bakın, size bunun böyle olduğunu söylüyorum" cümlesiyle özetlenebilecek tepeden inmeci öğretim yöntemlerinin önemli bir payının olduğu kanısındayım. Kuşkusuz bu sorun sadece ülkemizde yaşanmıyor. Bütün dünyada, daha iyi bir matematik öğretiminin nasıl olması gerektiği üzerine araştırmaların yapıldığını, çalıştayların düzenlendiğini biliyoruz. Ayrıca eğitim ve öğretimin ekonomik, kültürel birçok etkene bağlı olarak gerçekleştiğini düşündüğümüzde, matematik öğretimindeki güçlüğü, sorunun çetinliğini anlamak daha da kolaylaşıyor.

Neyi amaçlar matematik öğretimi?

Bugünkü noktadan baktığımızda, tümdengelimci bir yaklaşımla, matematiğin amacının mühendislik bilimlerinin, teknolojinin ve günlük hayattaki diğer alanların gereksinim duyduğu matematik bilgisini kazandırmak olduğu düşünülebilir ve doğrudur da… Ancak "bugün" üzerinden değil de, tümevarımcı bir yaklaşımla, matematiğin "var edildiği" ilk çağlara dönelim…

Matematik, nasıl bir ihtiyaca karşılık olarak varlığını insan bilincinde göstermiştir? Bu çağlarda insan, kendi varlığını sorgularken felsefeyi, doğayı sorgularken astronomiyi keşfetmiştir. İnsanın belki yaşamı sürdürmesinde değil, yaşamı sorgulamasında ihtiyaç duyduğu soyutlama gücü de matematiği "var etmiştir". Soyut düşünebilen insan matematiğin sonsuzluğunu keşfederken, matematik de insanın soyut düşünebilmesini geliştirmiştir. Sıfır sayısını hiç düşündünüz mü? Hep var mıydı sıfır sayısı? Yüzyıllar önce ilk kez Hindistan'da kullanıldığı kabul edilen sıfır sayısı insanın soyutlama gücünün dönüm noktalarından biri olarak kabul edilir. Soyut düşünebilen bir kişi, neden sonuç ilişkileriyle araştıran, inceleyen, kuşku duyan, kendini ve çevresini sorgulayan, keşfetme sezgisi olan kişidir. Okul matematiğinin öncelikli amacı da insanlarda soyut düşünebilmeyi geliştirmektir. Hemen her ülkenin eğitim sisteminde en temel ders olarak yer alan matematik, soyutlama gücü olan insanların yetiştirilmesini hedefler.

Matematik öğretimi soyut düşünebilmeye nasıl katkı sağlar?

Bir matematik probleminde (bu problem, yazının başındaki basit sayı problemi de olabilir) izleyeceğimiz yolu kabaca şöyle bir düşünelim. Öncelikle problemi anlamaya, tanımlamaya çalışırız (farklarının soruluyor olması nedeniyle bu problemde iki sayının da bulunmasının gerekip gerekmediğini). Sonrasında, elimizdeki verilerin özellikleri ve bu özelliklerin söz konusu problem için nasıl bir anlam taşıdığı üzerinde düşünürüz (asal sayıların özelliklerini, bu iki sayının toplamının 103 olarak verilmesinin ne anlama geldiğini). Bilinmeyeni bulmak için elimizdeki verilerin hangi özelliklerini, nasıl kullanmamız gerektiğini, veriler ve bilinmeyen arasındaki ilişkiye bakarak, bulmaya çalışırız (toplamı 103 olacak iki sayıdan birisinin çift, diğerinin tek sayı olması gerektiği; asal ve çift olan sayının 2 olacağı). Eğer bir ilişki bulamıyorsak, benzer ya da ilişkili diğer durumlarda yapılanlardan ya da yaptıklarımızdan yararlanmaya çalışırız (sayılarla ilgili daha önce çözdüğümüz ya da gördüğümüz problemler). Sonunda çözüm için bir yol ya da

plan elde etmiş olmamız gerekir (toplamı 103 olan iki sayıdan birisi 2 olduğuna göre diğeri 101 olacaktır). Geriye sadece planı uygulamak, bilinmeyeni bulmak ve elde ettiğimiz çözümü kontrol etmek kalmıştır (101–2 = 99).

Matematik problemlerinin çözümünde izlenen bu basit adımların içinde soyut düşünebilmenin temel öğeleri olan, muhakeme, sezgi, araştırma, yaratıcılık, keşfetme gibi kavramların olduğu açıkça görülüyor sanırım. Bir hekimin hastasının sağlık sorununu çözmesinde, bir öğretmenin konunun öğrenciler tarafından en iyi biçimde öğrenilmesini sağlama çabasında, bir sosyologun toplumsal bir soruna yaklaşımında, bir teknikerin elektronik bir cihazı tamir edişinde izlediği yolun bir matematik probleminin çözümünde izlenen yoldan çok farklı olmasa gerek. Bu noktada matematik öğretiminin günlük hayatımızdaki karşılığını yalın bir biçimde açıklayan Reyyan Ayfer'in şu sözlerini aktarmak isterim. "(…) Matematik eğitimi alınca insanın hayatına neler katılıyor? Birincisi, bir kere disiplin getiriyor. Problem çözme yeteneklerimizi geliştirmeyi sağlıyor. Problem çözmek deyince akla sadece matematik problemi çözmek gelmemeli. Yani sabah kalkıyorsunuz, problemle karşılaşıyorsunuz. Nasıl bir problem? Bir sürü iş yapılacak: Yumurta pişecek, süt ısıtılacak, küçük giydirilecek, siz bu arada giyineceksiniz, eşyalarınızı toplayacaksınız, anahtarınızı unutmamanız lazım. 'Hangisi önce yapılmalı, o olurken o aradaki vakti nasıl değerlendirmeli?' bile bir disiplin, bir düşünme gerektiriyor. Bu disiplini matematik eğitimi kendi verdiği yöntemlerle size sağlıyor. O yöntemleri siz hayatınızın her adımında kullanmaya başlıyorsunuz."

Matematiği unutmak için mi öğreniyoruz?

Matematiksel çalışma, varsayımlar oluşturma, sonuç çıkarma, kanıtlara ulaşma, hipotezler kurup bunları teoremlerle destekleme temeline dayanır. Bu becerileri geliştirmek okul matematiğinin esas amaçlarından birisidir. Yaygın inanışın aksine, matematik, okulda öğrendiğimiz ve yetişkin olur olmaz tamamen unuttuğumuz birkaç aritmetik oyundan ibaret değildir. Öyle

olsaydı tüm dünyada insanların matematik eğitimi gibi bu kadar uzun ve zahmetli bir uğraş içinde olmamaları gerekirdi. "Matematik genelde öğrencilerin pek hoşuna gitmez, neden 'korkunçtur' matematik?" sorusuna dünyaca ünlü matematikçimiz Cahit Arf , "Belletmeye çalışırlar da onun için. Hâlbuki bellemek değil, anlamak, keşfederek anlamak gerek matematiği" diye yanıt verir. Gerçekten de okullarımızda matematik öğretimi gerek lise ve üniversite giriş sınavları, gerekse salt bilgi yığınından oluşan yüklü müfredat programları yüzünden anlamaktan çok bellemeye yöneliktir. Örneğin, Öklid geometrisinin en temel teoremlerinden birisi olan üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olduğunu her öğrenci bilir, ancak kanıtlama ihtiyacı hissetmez. Oysa biraz düşünen, birkaç basit aksiyom ve teoremi bilen herkes bu teoremi küçük bir çabayla kanıtlayabilir. Matematiğin burada bizden istediği, görünenin arkasında görünmeyen ama var olan ve gördüğümüzü var eden bütün parça ve süreçleri fark etmemiz, bulmamızdır. Yapacağımız kanıt, önümüze sadece son sahnesi ile konmuş bir filmi başına dönerek izlemek kadar heyecanlı ve zevklidir aslında.

Sorunlarımızı matematikle çözebilir miyiz?

Basit bir teoremi bile kanıtlama yerine bellemeyi tercih eden, kanıtlama isteği, sezgisi olmayan birisinin günlük hayatta karşılaştığı bir sorunu algılayıp çözmede sıkıntı yaşaması kaçınılmaz olacaktır. Çünkü olayların, sorunların nedenlerinden çok sonuçları üzerinde durup sorunu doğru tanımlamak için düşünmeyen, verili bilgiyi sorgulamayan, gördüğünü bir fotoğraf karesi gibi algılayıp o fotoğrafı oluşturan detayları görmeyen bir zihinsel yapı problem çözümünde izlenecek adımları atmaksızın çözüme ulaşmak isteyecektir. Bu durumda, çözüm için izlenen yol ve planın problemi çözmekte yetersiz kalacağı açıktır. Sorunu çözme, öncelikle sorunu doğru anlama ve sorunla ilişkili görünen ve görünmeyen tüm durumları değerlendirmeyi gerektirir; çözüm oluşturma aşamasına ancak bundan sonra geçilebilir. Tüm bu sürecin, bir matematik problemini çözmede izlenecek yola ilişkin bu yazıda önceden söz ettiğimiz süreçle benzerliği,

hatta aynılığı dikkat çekicidir. Diğer bir deyişle günlük problemleri çözmede izlenen yol ile matematik problemini çözmede izlenen yol aynıdır, farklı olan sadece problemlerin kendisidir. Kısacası, matematik, bilinenle bilinmeyen, görünenle görünmeyen arasında ilişki kurmayı öğretir bize.

Mesleği bakımından matematiğin çok uzağında görünen ünlü oyun yazarımız Haldun Taner yukarıdaki bu durumu ne güzel açıklıyor: "Türkiye'nin bazı alanlarda ortaçağ çıkmazlarına saplanıp kalışının, ipe sapa gelmez yanıltmacalar içinde yokuş aşağı gidişinin, özü ve esası unutup sen ben dalaşına girişinin kökeninde düşünce yoksulluğu yatıyor bence. Matematik düşünce disiplini hor görüldüğü için az ve öz yerine bol ve boş konuşuluyor."

Bu sözler üzerine düşünüyorum, acaba soyut düşünebilme yeteneği gelişmiş bireylerin çoğunlukta olduğu bir toplumda; "bol ve boş" konuşan bu kadar çok siyasetçi siyaset yapabilir miydi? Düşünüyorum, acaba görsel ve yazılı medyada kirlilik yaratanlar, insan yaratıcılığının estetik açıdan en güzel ürünlerinden biri olan matematiğin biraz olsun farkında olabilseydiler, bugün olayları değil de kişileri tartışır olur muyduk? Düşünüyorum, acaba akşam televizyon kanallarında izlediğimiz tartışmalarda karşısındakini dinlemeyen, karşısındaki konuşmacı konuşurken kendisinin ne söyleyeceğini düşünen, daha doğrusu "düşünmeyen" insanlar olur muydu? Düşünüyorum, acaba matematiği belleyerek değil de keşfederek, anlayarak öğrenebilseydik sosyal belleği bu denli zayıf insanlardan oluşan bir toplum olur muyduk?

Bu düşüncelerim okur tarafından abartılı bulunabilir, sanki matematiğin sihirli bir değnek olduğu, bütün sorunları çözebilecek bir güç gibi gösterildiği sonucu çıkarılabilir. Mutlaka, insanların yaşadığı sorunlarda ve çözümlerinde ekonomik, sosyal, psikolojik etkenler en önemli rolü oynuyor. Ama soyutlama gücü zayıf, neden sonuç ilişkisini kurgulayamayan, matematiği gerektiği gibi yaşayamayan insanların çoğunlukta olduğu toplumlarda bilimin, sanatın, siyasetin, inançların sağlıklı biçimde yaşanamayacağını belirtmek yanlış olmaz sanırım.

Matematiksel mantık alanında çığır açıcı çalışmalara imza atmış ünlü düşünür Bertrand Russell'ın insanın neden matematik öğrenmesi gerektiğini açıklayan sözleri son söz olsun isterim: "Arzu edilen şeyin sadece yaşamak olgusu olmayıp, yüce şeyler üzerinde düşünerek yaşamak sanatı olduğunun hatırlanmasında yarar vardır."

ŞEYTAN DOLDURUR, KANITLAMADAN ASLA!

Ünlü İngiliz matematikçi G. Hardy bir gün Cambridge'de anlatacaklarını kavrayabilecek bir avuç öğrencinin önünde ders vermektedir. Tahtaya "kesinliği su götürmez" dediği karmaşık bir eşitlik yazar ve aniden konuşmasını keser.Yolunda gitmeyen bir şeylerin olduğunu fark eder, yazdıklarından emin değildir. Zihninin kendisine bir oyun oynadığını düşünür. Sessizce, derin derin düşünmeye başlar. Bir süre sonra dersi yarıda bırakarak odasına gider. Bir ileri bir geri dalgın dalgın volta atmaya başlar. Yarım saat sonra sınıfa geri döndüğünde tahtadaki formüle bakıp şu sözü söyler: "Evet, evet kesinliği hiç su götürmez."

Kahramanların adları değiştirilerek de anlatılan bu hikâye büyük bir olasılıkla uydurmadır. Ama matematik yapan, matematik dersi veren hemen herkesin çok sık karşılaştığı bir durumdur. Dersin bir yerinde aniden bir sessizlik olur, sanki dersi anlatan bir yerde takılmıştır. O an, atlaması gereken bir eşik vardır. O eşiği geçmeden ilerlemek mümkün değildir. "Kesinliği su götürmez" diyerek ilerlerse yaptıklarının hiçbir matematiksel değeri olmaz. İşte, o eşiği geçebilmenin matematikteki karşılığı kanıttır. İkna değil, kanıt gerekir.

Matematik gemisi kanıt olmadan yüzemez. Matematik Köyü'ndeki derslerde Köy muhtarının sık sık söylediği bir sözdür: Şeytan doldurur, kanıtlamadan asla!

Denizin morluğunu belirtmek için
Deniz mordur demek yetmiyor
O morun gerekçesini de belirtmeli
Denizle olan ilişiğini de
Ondan sonra deniz mor
Metin Eloğlu

Deniz neden mor? 2+2, 2×2'ye neden eşit? "Neden?" sorusuna verdiğimiz matematiksel yanıtın adıdır kanıt. Bu yüzden matematikçiler bir önermenin doğru ya da yanlış olmasından çok, neden doğru veya neden yanlış olduğuyla ilgilenirler. Kanıt, matematiği diğer bilimlerden ayıran en önemli özelliktir, onu özel kılan bir araçtır. Matematiğin tutarlılığı, kesinliği ve zaman aşımından bağımsız olması kanıt kavramıyla ilgilidir. Örneğin çok bilinen, "**Sonsuz sayıda asal sayı vardır**" teoremi çoğu insana sezgisel olarak doğru gelebilir, ama asal sayıların sonsuz sayıda olduğu hiç de belirgin değildir. Bugünün güçlü bilgisayarları sayesinde çok büyük asal sayılar bulabiliriz; fakat sonsuz sayıda asal sayı olduğunu söyleyemeyiz. Bunun için bilgisayarlar yetersiz kalır. Bu teoremin doğruluğunu kesin olarak bilmemizin nedeni 2300 yıl önce Öklid tarafından matematiksel olarak kanıtlanmış olmasıdır. Bu yüzden Öklid'in 2300 yıl önce inşa ettiği matematiğe bugün de güvenebiliyoruz. Böylesine bir kesinlik matematik dışındaki hiçbir insan aktivitesi için geçerli değildir.

Matematiksel kanıt nedir?

Genel olarak kanıtı, içinde "Neden?" sorusunun yanıtını barındıran bir cihaz olarak düşünülebiliriz. Bu cihaz matematiksel bir ifadenin gerçek ve geçerli olduğunu göstermekte kullanılır. Peki, bu cihaz nasıl çalışır? Bir önermenin doğru olduğunu kanıtlamak için doğru olduğunu kabul ettiğimiz başka bir önermeye başvururuz. Diğer bir deyişle, doğru olduğunu

kabul ettiğimiz bir önermeden yeni bir önerme elde ederiz. Tabii ki bu iş için iki önerme (eski ve yeni) arasında bir bağ kurmamız gerekir. Matematikçiler, eski önermelerden yeni bir önerme elde etme yöntemine ***çıkarım kuralı*** adını vermişler. Matematikte çıkarım kuralları olmasaydı, doğru olduğunu kabul ettiğimiz önermelerden öteye gidemezdik, yani matematik olmazdı.

Çok sayıda çıkarım kuralı olsa da matematiğin tümü *modus ponens* adı verilen tek bir çıkarım kuralına indirgenebiliyor. *Modus ponens* Latince kökenli bir şart kipini ifade eder. Modus, yöntem; ponens ise doğrulama anlamındadır. Türkçeye *doğrulama yöntemi* olarak çevirebiliriz. *Modus ponens*'i kısaca şöyle açıklayabiliriz: "Eğer P doğru iken Q doğruysa ve ayrıca P de doğruysa, o zaman Q da doğrudur." Örneğin,

Ahmet Matematik Köyü'nün öğrencisi ise matematiksel kanıtın ne olduğunu öğrenmiştir.$(P \Rightarrow Q)$
Ahmet Matematik Köyü'nün öğrencisidir. (P)
Ahmet matematiksel kanıtın ne olduğunu öğrenmiştir.(Q)

Yukarıdaki ilk iki önermeden,

Ahmet matematiksel kanıtın ne olduğunu öğrenmiştir.

önermesini *modus ponens* sayesinde çıkarabiliriz.

Modus ponens, "P *ise* Q" ve "P" önermelerinden yeni bir önerme olan "Q" önermesini çıkarmamızı sağlar.

Matematiksel kanıtı tanımlamadan önce, matematikte doğru kabul edilen önermelere aksiyom denildiğini hatırlatalım. Aksiyomlar soyut matematiğin öncül önermeleridir. Kanıtlanması gereken önermeler olan teoremler aksiyomlardan elde edilir. Aksiyom kendi içinde o kadar açık ve kabul edilebilirdir ki, kanıtlanmasına gerek yoktur. Eğer bir aksiyomu kanıtlamak istersek, o kanıt tek adımdan oluşur; o adım da aksiyomun kendisidir. Örneğin Öklid geometrisinin bir aksiyomu olan "**Bütün, parçadan büyüktür**" önermesi kanıtlanmadan kabul edilmiştir; ama matematiksel kanıtın tanımını verince bu önermenin kanıtının kendisi olduğunu göreceğiz.

Şimdi, kanıtın tanımını yapmaya çalışalım. Matematiksel kanıt, bir önermeler listesidir. Sonlu sayıdaki önermeden oluşan bu listede her önerme bir önceki önermeden *çıkarım kuralıyla* (*modus ponens*) elde edilir. Elbette önermelerden oluşan her listeye kanıt adını veremeyiz. Örneğin,

$$P_1, P_2 \ldots P_n$$

listesinin kanıt olması için, $1 \leq i \leq n$ koşuluyla, P_i'nin ya bir aksiyom olması ya da listede P_i'lerden önce yer alan önermelerden bir çıkarım kuralıyla elde edilmiş olması gerekir.

Listenin son önermesi olan P_n bir teoremdir ve yukarıdaki liste ise P_n önermesinin kanıtıdır. Artık kimse P_n'e karşı bir örnek bulamaz; onunla çelişen bir matematiksel gerçekten söz edemez. P_n önermesi bulunduğu aksiyom sistemi içinde çürütülemez.

Dikkat ederseniz, kanıtla ilgili yaptığımız açıklamalardan her aksiyomun aynı zamanda bir teorem olduğu sonucu ortaya çıkıyor; çünkü *çıkarım kuralı*, tek satırlık listeler için de geçerli. Örneğin *P* aksiyomunun tek satırlık kanıtı:

$$P.$$

Aksiyomu, doğru kabul ettiğimiz önerme olarak tanımlamıştık. Şimdi ise her aksiyomun bir teorem olduğunu ve kanıtının da aksiyomun kendisi olduğunu söylüyoruz; çünkü matematiksel kanıtın tanımı bizi bu sonuca götürüyor.

Matematikte, doğrudan kanıt, çelişki yoluyla kanıt, tümevarımla kanıt gibi birçok kanıtlama yöntemi vardır. Aşağıdaki teorem doğrudan kanıtlama yöntemiyle kanıtlanmıştır. Bu yöntemde, kanıtlamaya doğru olduğu bilinen bir önermeyle başlanır ve bir dizi *modus ponens* uygulamasıyla yeni önermeler elde edilerek kanıtlanacak önermeye ulaşılır. Örneğin aşağıdaki kanıt, $\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy}$ eşitliği gibi yeni önermeler kullanılarak yapılmıştır.

Teorem. *x* ve *y* pozitif gerçel sayılar ise, $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ olur.

Kanıt. $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$ olduğunu biliyoruz. Bu önermeyi *P* ile gösterelim.

$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x + y - 2\sqrt{x}\sqrt{y} \geq 0$ yazabiliriz.

Bu eşitsizliği düzenlersek

$$x + y \geq 2\sqrt{x}\sqrt{y}$$
$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

elde edilir ve teorem kanıtlanmıştır. Bu kanıtın bütününü de bir *modus ponens* uygulaması olarak görebiliriz, şöyle ki:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

önermesini Q ile gösterirsek, yukarıdaki adımlar *modus ponens*'in $P \Rightarrow Q$ aşaması olur. Böylece, P doğru iken Q doğru ve P de doğru ise *modus ponens* sayesinde Q'nun doğru olduğunu kanıtlamış oluruz.

Matematiksel kanıt neden önemlidir?

Matematiksel bir iddianın gerekçelendirilmesine ne zaman ihtiyaç duyulduğu tam olarak bilinmiyor. Belki de ilk matematiksel kanıt Babiller zamanında yapılmıştır; çünkü onlar Pisagor Teoremi'ni Çinlilerle birlikte Pisagor'dan önce biliyorlardı. Bulunan tabletlerde Pisagor Teoremi'nin neden doğru olduğunun açıklamasına rastlanmıştır. Ama Babillerin bu tabletlerde yaptığı modern standartlara göre kanıt değildi. Onlar matematiksel bir gerçeği mantıksal bir gerekçeye dayandırmaya çalıştılar.

Bazı matematik tarihçileri matematik tarihindeki ilk kanıtın Milet'li Tales (MÖ 600) tarafından yapıldığını kabul ederler. Tales, çapın çemberi iki eşit parçaya ayırdığını kanıtlamıştır. Ama matematiği tanım, aksiyom ve teoremlerle aksiyomatik bir yapıya kavuşturan ilk insan Öklid'dir (MÖ 300).

Matematiksel kanıtın bileşenleri olarak kabul edebileceğimiz tanım, aksiyom, teorem, çıkarsama ve soyutlama gibi kavramlar ilk kez Öklid tarafından yazılan *Elementler* kitabında sistematik olarak ele alınmıştır. *Elementler*, soyut matematiğin başlangıcı olarak kabul edilir. Kanıt kavramı da bugünkü niteliğine çok

yakın bir şekilde ilk kez bu kitapla ortaya çıkmıştır. Daha sonraki dönemlerde soyut matematiğin gelişmesine koşut olarak kanıtın önemi daha iyi anlaşılmıştır.

Artık günümüzde, dünyanın dört bir yanında çalışan on binlerce matematikçi, matematiği matematik yapanın kanıt kavramı olduğunu çok iyi biliyor. Kanıt matematiğin kalbidir. Eser besteleyecek bir müzisyen için notalar, bir ressam için renkler, bir yazar için sözcükler, cümleler neyse bir matematikçi için de kanıt aynı şeydir. Matematikçi olmanın kilit noktasıdır.

Matematik, yeni fikirlerin çıkması ve bu fikirlerin kanıtlama yoluyla doğrulanmasından oluşur. Matematiğin zamandan bağımsız olmasındaki özgünlük onun metodolojisinden kaynaklanır. Bu metodoloji de kanıttır. Matematikte kanıt, neyin doğru ya da yanlış olduğunu anlamanın, sırtımızı nereye dayayacağımızın biricik yöntemidir.

Matematiksel kanıtın bir diğer önemi ise kanıt sürecindeki kazanımlardır. Geçerli bir kanıt yapabiliyor olmak, üzerinde çalıştığınız problemi tamamıyla anladığınızın göstergesidir. Dahası, bir varsayımı kanıtlamak için verilen çaba, çoğu zaman üzerinde durduğunuz teorem hakkında daha da derine inmenizi gerektirir. Bir matematikçi bir varsayımı kanıtlayamasa bile, kanıtlama uğraşı boyunca büyük bir birikime sahip olur. Matematik tarihi, başarısızlıklarla sonuçlanmış, ama çok parlak sonuçları olan kanıtlama mücadeleleriyle doludur. Matematikçilerin yüzyıllarca Öklid'in *Paralellik Aksiyomu*'nu kanıtlamaya çalışmaları Öklid-dışı geometrilerin keşfine yol açarak muhteşem sonuçlar doğurmuştur.

Matematiksel kanıtın bilimsel değerini çok iyi anlatan bir örnek de *Cebirin Temel Teoremi*'dir. Bu teoremi birçok matematikçi kanıtlama girişiminde bulunmuş, ilk kanıt büyük Alman matematikçi C. F. Gauss tarafından 1729'da yapılmıştır. Bu kanıttaki açık, topolojik bir yaklaşımla 1920'de Rus matematikçi A. N. Ostrovsky tarafından kapatılmıştır. Gauss, ilk kanıtından 50 yıl sonra iki kanıt daha yayımlamıştır. Bu teoremin günümüze kadar onlarca değişik kanıtı yayımlanmıştır. Tamamen farklı bakış açılarına ve matematik bilgisine sahip olan bu kanıtlar,

cebir, topoloji, olasılık kuramı gibi matematiğin değişik dalları arasında analojik bağların kurulmasını sağlamıştır.

Matematiksel kanıtın çığır açıcı sonuçlarına verilebilecek en çarpıcı örneklerden biri de *Poincaré sanısı*nın kanıtıdır. Altı yıl önce Rus matematikçi Perelman tarafından yapılan bu kanıt, matematiksel değerinin ötesinde kimya ve fiziği de içine alan zengin bir yapıya sahiptir. Evrenin biçimi hakkında önemli ipuçları taşımakla birlikte, birçok bilim insanının görüşü bu kanıtın kuramsal fizikte, görelilik kuramında önemli gelişmelere yol açacağı doğrultusundadır.

Kanıtsız matematik!

Matematik öğretiminden kanıtı çıkarırsanız geriye ne kalır? Belki çok iyi denklem çözebilirsiniz, parabol çizebilirsiniz, zor bir trigonometri sorusunu da çözebilirsiniz, bir fonksiyonun minimum değerini de hesaplayabilirsiniz, çok iyi limit alabilirsiniz, çok iyi türev de alabilirsiniz ama yaptığınız işin adı matematik değildir ve matematik öğrendiğinizi zannedersiniz. Bugün ülkemizde çok yaygın olarak yapılan bu işin matematiğin özü ve matematik öğretiminin amacıyla hiçbir ilgisi yoktur; çünkü matematik öğretiminin öncelikli amacı insanların soyut düşünebilme yeteneğinin geliştirilmesidir. Matematiği kanıtsız öğrenmeye çalışan birisi, doğuştan var olan soyutlama ve muhakeme gücünü gittikçe kaybeder. Neden sonuç ilişkisini kuramaz. Verili bilgiyi sorgulama ihtiyacı duymaz, her karşılaştığı bilgiyi ezberlemeye çalışır.

Yıllardır karşılaştığım bir sorudur: Neden kanıtlanmış teoremleri bir kez daha kanıtlıyoruz? Bu soruyu bir espri değil, ciddi olarak soran çok öğrenci var. Öğrenciler, kanıt olmadan da matematik yapılabileceğini düşünüyorlar; çünkü daha ilköğretimde dairenin alanını, silindirin hacmini veren formüllerle karşılaşıyorlar. Bu formülleri ezberlemek zorunda bırakılıyorlar, nasıl çıktığını keşfetmeden, "öğretmen söylediyse doğrudur" diyerek. Aslında yeni bir şeyi öğrenen herkes, bir önermenin doğruluğunu nedenleriyle öğrenmek ister. Ama ilk ve orta öğretimdeki programlar ve uygulamaları her insanda var olan nedenleriyle

öğrenme isteğini, yaratıcılığı yok ediyor. Örneğin liselerde kanıt kavramı, Mantık konusunun içinde yüzeysel bir biçimde ele alınır ve doğru düzgün işlenmeden geçiştirilir ve sonraki bölümlerde neredeyse hiçbir önermenin kanıtı yapılmaz. Oysa konuların birçoğu kolaylıkla kanıtlanabilecek önermeler yazılarak öğrencilerde kanıtlama gücü ve sezgisi geliştirilebilir. Elbette, böylesi bir matematik öğretimi için liselerdeki öğretim programlarında köklü değişiklikler yapmak gerekir. Ama yapılmıyor. Neden?

Kuşkusuz, matematik öğretimi, sadece ülkemizde değil, bütün dünyada içinde önemli zorlukları barındıran bir etkinlik. Ayrıca matematiksel kanıtın amacına ulaşabilmesinin öğrencilerin düzeylerine de bağlı olduğu biliniyor, ama asıl acı gerçek şu ki, matematiği tepeden inme bir biçimde, belleyerek öğrenmek zorunda kalan öğrenciler bir süre sonra ya matematikten kopuyorlar ya da hızla işlem yapan, beş seçenekten birini işaretlemeyi öğrenen robotlara dönüşüyorlar. Oysaki gerçek matematik öğretimi "kesinliği su götürmez" sözünden kuşku duyma alışkanlığını kazandırmayı amaçlamalıdır.

KAYNAKLAR

1) Ali Nesin, *Önermeler Mantığı*, Nesin Yayıncılık, 2009.

2) www.math.wustl.edu, Krantz, S. G, The History and Concept of Mathematical Proof, 2007.

2x2 = 4'ÜN KANITI ÜZERİNE

"İki kere iki kaç eder?" diye soruyorsunuz. Aldığınız yanıt sorduğunuz kişinin mesleğine göre değişiyor. Muhasebeci: "Kaç olmasını istiyorsunuz?" Ekonomist: "Yüzde 10 aşağı veya yukarı oynayabilir, ama ortalama dört eder" diyor. Psikanalist: " Şuradaki divana uzanın ve bunu neden bilmek istediğinizi bana anlatın." Matematikçi ise bir süre düşünüyor, önüne kağıt kalemi alıp, sayfalarca kağıdı doldurduktan sonra "2×2'nin değeri 4'e eşittir" yanıtını veriyor.

Her fıkrada olduğu gibi bu fıkrada da birçok abartılı yan var, ama matematikçinin verdiği yanıtın ve yaptığı çalışmanın son derece gerçekçi olduğunu söyleyebiliriz. Bir matematikçinin "2×2 = 4" diyebilmesi için 2 ve 4 sayılarını, çarpma işlemini tanımlaması, daha doğrusu sayıları, işlemleri yaratması gerekir ki bu da hiç kolay ve kısa bir iş değildir.

2×2 = 4'ün kanıtıyla yıllar önce *Matematik Dünyası* dergisinde karşılaşmıştım. Derginin o sayısındaki giriş yazısında Ali Nesin'in anlattığı bir anı, 2×2 = 4 ve matematikle ilgili genel algıyı çok iyi açıklıyor sanırım: *(…) Dönemin sonlarına doğru bir derste tahtaya 'Teorem:* **2×2 = 4***' yazıp kanıtlamıştım. Kanıt bittiğinde ders de bitmişti. Ama biraz geç kalmıştım, sosyoloji bölümü öğrencileri bir sonraki ders için kapıya yığılmışlardı. Sınıftan çıkmak için kapıya doğru adımımı atar atmaz öğrencilerim tahta-*

ya hücum edip alel acele tahtayı silmeye başlamışlardı. Buna bir anlam verememiştim, bugüne dek hiç böyle bir şey yapmamışlardı. 'Hayrola?' diye sordum. 'Hocam, dedi içlerinden biri, sosyoloji öğrencileri görmesinler, ayıplarlar...' Çok güldüm… Elbette, sosyoloji öğrencileri ne bilsinler 2×2 = 4'ün derinliğini ve zorluğunu… (…)

Eğer matematiğin sadece ve sadece zihinsel bir uğraş alanı olduğu göz ardı edilirse, "iki kere iki dört eder" önermesi kanıtlanmasına gerek kalmayacak kadar kesin doğru bir ifade olarak algılanabilir. Bu önermeyi "sezgisel bir hakikat" olarak kabul etmek pek o kadar yanlış bir tavır değildir, ama matematiksel gerçeklik son tahlilde sezgilerden muaf olmalıdır. Matematikle içli dışlı olmayan biri, ya da amacı matematik olmayan biri $2 \times 2 = 4$ eşitliğini temellendirme gereksinimi duymaz. Bu eşitliğin doğru olduğunu göstermek için bir elin parmakları yeter de artar bile! Bu yöntemle belki doğru sonucu buluruz ama eşitliği matematiksel anlamda kanıtlamış olmayız; çünkü yaptığımız iş fiziksel bir deneydir, tamamen zihinsel bir akıl yürütme yoktur, parmak gibi etli canlı, fiziksel dünyanın nesnelerine gereksinim duyarız.

Peki, bir matematikçi $2+2 = 4$, $2\times2 = 4$ eşitliklerini kanıtlarken hangi adımları izler? Nasıl kanıtlar? Bu soruları bu yazıda yanıtlayacağız ama verilecek olan tam bir matematiksel yanıt bu yazının sınırlarını aşacağından, sadece bu kanıtlar için gerekli olan tanım, aksiyom ve teoremleri vererek bu eşitlikleri kanıtlayacağız. Bu metni kaleme alırken *Matematik Dünyası* dergisi 2003-IV sayısından çok yararlandım. Daha kuramsal bilgilere ulaşmak isteyen okur bu kaynağı inceleyebilir.

Bir matematikçi, öncelikle yukarıdaki eşitliklerde bulunan 2 ve 4 sayılarını (daha doğrusu terimlerini) tanımlamak ister, çünkü 2 ve 4 terimleri kanıtlamak istediği önermede yer alan sembollerdir. 2 ve 4 hakkındaki bir ifadenin kanıtlanabilmesi için, elbette her şeyden önce 2 ve 4 terimlerinin matematiksel anlamları bilinmelidir; matematiksel anlamı bilinmeyen bir ifade tabii ki matematiksel olarak kanıtlanamaz. Bir an için matematikçinin bu anlamlandırmayı sayma işlemiyle yaptığını düşünelim. Örneğin 2 sayısını insanlardaki, 4 sayısını da köpeklerdeki ayak

sayısı olarak tanımladığını varsayalım. Hemen akla, diğer sayıları nasıl tanımlayacak sorusu geliyor, örneğin dört basamaklı bir sayıyı nasıl anlayacak? Hadi diyelim, bu sayıları da aynı şekilde varlıkları ve nesneleri sayarak tanımladı, ama teker teker bütün sayıları sonsuza dek bu yöntemle tanımlaması mümkün değil. Bu yüzden bir matematikçi sayıları anlamak için matematiksel genel bir sayı kavramına ihtiyaç duyar. Sayıları teker teker yaratırken de yine matematiğin dilini kullanır. Günlük dilde kullandığımız 2'yle, matematikçinin 2×2 = 4 eşitliğinde kullandığı 2 aynı şey değildir. Sayıları somut ve soyut olarak sınıflandırırsak "iki armut"taki "iki" somut sayı, sadece "iki" ise soyut sayı olarak nitelendirilebilir.

Matematikçilerin soyut sayıları nasıl tanımladıklarına ve 2×2 = 4 eşitliğinin kanıtına geçmeden önce küçük bir not düşelim: Matematikte sayıların nasıl tanımlandığından çok hangi özelliklere sahip oldukları önemlidir. Matematikçiler bir eşyanın nasıl yaratıldığıyla değil, eşyalar arasındaki bağıntılarla ilgilenirler, bağıntıları değiştirmemek şartıyla bir eşya yerine diğerini koymanın önemi yoktur. Bir matematikçi 2×2 = 5 "eşitliğine" tam da bu nedenle karşı çıkar; çünkü bu "eşitlikteki" sayılar ve çarpma işlemi istenen özellikleri sağlamaz.

Doğal sayıların matematiksel tanımının yapılabilmesi için Frege'den başlayarak birçok matematikçi uğraş vermiştir. İtalyan matematikçi Giuseppe Peano, doğal sayıların başat özelliklerini keşfeden ilk matematikçidir. Peano, işe doğal sayıların varlığını önceden kabul ederek başlar, sayılarla işlemlerin temelini oluşturan aksiyomları belirler.

Şimdi "Kümeler Kuramı" denizinin kıyısında ayaklarımızı suya sokalım ama yüzmeye kalkmayalım, boğuluruz; çünkü o denizde popüler matematik yaparak yüzmek mümkün değil. Öncelikle "küme" ve "elemanı olma" kavramlarının matematikte tanımsız kavramlar olduğunu belirtelim ve ardından da bazı tanımları, aksiyom ve teoremleri sıralayalım. Maalesef, bazı teoremleri kanıtını vermeden yazacağımız için belki matematiğin kalbini kıracağız ama meraklı okur bu teoremlerin kanıtları ve daha fazlası için Kaynak 1'i inceleyebilir.

Okurun, boşküme, altküme kavramlarını, bileşim işlemini ve bu işlemin özelliklerini bildiğini varsayıyorum. Kanıt yolculuğuna çıkmadan önce, orta öğretim matematiğinde bilinmeyen ama çok önemli bir şeyi belirtelim: Kümeler kuramının tüm nesneleri birer kümedir. Elemanlar, sayılar, fonksiyonlar, toplama ve çarpma işlemleri hepsi birer küme olarak tanımlanıyor kümeler kuramında. Aşağıda sayıların nasıl küme olarak tanımlandığını göreceğiz. Artık, kanıt için tanım, aksiyom ve teoremlere geçelim.

1. Boşküme Aksiyomu. *Hiç elemanı olmayan bir küme vardır.*
2. Teorem. *Hiç elemanı olmayan tek bir küme vardır: Boşküme. (Boşkümeyi { } olarak göstereceğiz.)*
3. Eşitlik Aksiyomu. *Elemanlarının tümü aynı olan iki küme birbirine eşittir.*
4. Tanım. 0 = { }.

Yukarıdaki 0'ın tanımına dikkat çekmek isterim. Sayıların küme olarak tanımlanmasının ilk örneğini vermiş olduk. Bu tanımdaki 0, matematikçinin kullandığı 0'dır, yani "soyut sıfır"dır. Aşağıdaki ilk dört tanımda da aynı şekilde 1, 2, 3 ve 4 sayılarının kümelere bağlı olarak matematiksel tanımları verilmiştir.

5. İki Elemanlı Küme Aksiyomu. *Eğer x ve y birer kümeyse, eleman olarak sadece x ve y'yi içeren bir küme vardır.*

6. Tanım. 1 = {0}.

7. Tanım. 2 = {0, 1}.

8. Bileşim Aksiyomu. *Eğer x bir kümeyse, sadece ve sadece x'in elemanlarının elemanlarından oluşan bir küme vardır.*

Bu kümeye *x*'in (elemanlarının) ***bileşimi*** adı verilir. $\cup x$ olarak gösterilir. Örneğin, $\cup\{\{0, 1\}, \{2\}\}=\{0, 1, 2\}$ olur.

9. Tanım. $3 = 2\cup\{2\} = \{0, 1\}\cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$.

10. Tanım. $4 = 3\cup\{3\} = \{0, 1, 2\}\cup \{3\} = \{0, 1, 2, 3\}$.

Bu tanımlarla, bu yazıda bizim işimizi görecek olan sadece 0, 1, 2, 3 ve 4 sayılarını tanımlayabildik. "Genel bir doğal sayı tanımı verilmeli" diyen okur haklıdır, bu tanımı Kaynak 2'de bulabilir.

Yukarıda tanımlanan beş sayıya baktığımızda "bir sayının ardılı", o sayıyla o sayıdan oluşan kümenin bileşimi. Örneğin 4, 3 kümesiyle sadece 3 elemanından oluşan {3} kümesinin bileşimi. Şimdi de sadece elimizdeki beş sayı için ***ardılı*** kavramını tanımlayalım.

11. Tanım. $S(x) = x \cup \{x\}$.

Bu tanıma göre $S(0) = 1$; $S(1) = 2$; $S(2) = 3$ ve $S(3) = 4$ eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikler 0'ın ardılının 1, 1'in ardılının 2, 3'ün ardılının 4 olduğunu gösterir.

Şimdi toplama işlemini tanımlayabilmek için iki tanım verelim.

12. Tanım. $n + 0 = n$.

13. Tanım. *Eğer* $n + m$ *tanımlanmışsa,*

$$n + S(m) = S(n+m).$$

Toplama işlemini tanımladığımız için artık aşağıdaki teoremi kanıtlayabiliriz.

14. Teorem. $S(n) = n + 1$

Kanıt: $n + 1 = n + S(0)$ [Tanım 11]
$= S(n + 0)$ [Tanım 13]
$= S(n)$ [Tanım 12]

15) Teorem. $2 + 2 = 4$

Kanıt: $2 + 2 = 2 + S(1)$ [Tanım 11]
$= S(2 + 1)$ [Tanım 13]
$= S(S(2))$ [Teorem 14]
$= S(3) = 4$ [Tanım 11]

Şimdi de çarpma işlemini tanımlayabilmek için iki tanım verelim.

16) Tanım. $n \times 0 = 0$.

17) Tanım. *Eğer* $n \times m$ *ve* $n \times m + n$ *tanımlanmışsa,*

$$n \times S(m) = n \times m + n.$$

Artık $2 \times 2 = 4$'ü kanıtlayabiliriz.

Teorem. $2 \times 2 = 4$

Kanıt: $2 \times 2 = 2 \times S(1)$ [Tanım 11]
$= 2 \times 1 + 2$ [Tanım 17]
$= 2 \times S(0) + 2$ [Tanım 11]
$= (2 \times 0 + 2) + 2$ [Tanım 17]
$= (0 + 2) + 2$ [Tanım 16]
$= (0 + S(1)) + 2$ [Tanım 11]
$= S(0 + 1) + 2$ [Tanım 13]
$= S(S(0)) + 2$ [Teorem 14]
$= S(1) + 2$ [Tanım 11]
$= 2 + 2 = 4$ [Tanım 11, Teorem15]

Bu yazıda çok zorlandım. Dostum Ali Nesin'den yardım istedim, defalarca baktı ve defalarca uyardı: "Vazgeç bu yazıdan, popüler dille saf matematik yapılamaz." Haklıydı, doğal sayıların inşasında, toplama ve çarpma işlemlerinin tanımlanmasında çok "günah" işledim. Ama yine de bu yazıyı okuyan meraklı okurun $2 \times 2 = 4$ eşitliğinin arkasındaki matematiksel gerçek hakkında bir fikre sahip olabileceğine inandığımdan kitaba almaya karar verdim. Daha da meraklı okurun, Ali Nesin'in *Sayıların İnşası* kitabını okumalarını hararetle öneririm.

KAYNAKLAR

1) "Doğal Sayılar Ne Kadar Doğaldır?", "Doğal Sayılardan Ne İstiyoruz?", "Biraz Kümeler Kuramı ve Birkaç Doğal Sayı", *Matematik Dünyası*, 2003- IV
2) Ali Nesin, "Sayıların İnşası", www.acikders.org, 2011

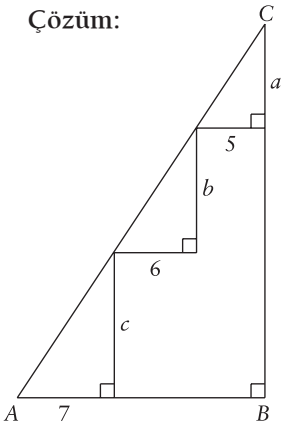
‘SÖZSÜZ KANITLAR’ BAHÇESİNDE BİR GEZİNTİ

Meslek hayatım boyunca öğrencilerimden çok şey öğrendim. Onların sayesinde çok ilginç sorularla ve sıra dışı çözüm yöntemleriyle karşılaştım. Birçok kez benden daha doğru ve daha güzel düşünüyor olmalarına tanık oldum. Bu tanıklık anlarında, hep Cemal Süreya’nın bir dizesini anımsarım: “Neler öğrenmiyor ki çetrefilli güz deneysiz bahardan”

Bu yazıdaki bilgilere de bir “deneysiz bahar”ın sorusu üzerine ulaştım. Matematiği oldukça iyi olan bir öğrencim sormuştu soruyu. Çözümünü bildiğini söyledi, benim çözüp çözemeyeceğimi merak ediyordu. Soru bir sayı problemiydi. Uğraştım, çözemedim, ipucu istedim. “Pisagor Teoremi” dedi. Bir sayı probleminde Pisagor Teoremi’nin ne işi var diye düşünürken, aklıma daha önce karşılaştığım bir sorunun çözümü geldi ve öğrencimin de yardımıyla sonucu buldum. Sadece Pisagor Teoremi’ni ve temel işlemleri bilen herkesin anlayacağı bu soruyu ve çözümü aşağıya yazıyorum.

Soru: a, b, c pozitif gerçel sayılar ve $a+b+c = 24$ olmak üzere, $\sqrt{a^2+25}+\sqrt{b^2+36}+\sqrt{c^2+49}$ **ifadesinin tamsayı değeri kaçtır?**

Çözüm:



$$|AB| = 18,\ |BC| = 24,\ |AC|^2 = 18^2 + 24^2$$

$$|AC| = \sqrt{a^2 + 25} + \sqrt{b^2 + 36} + \sqrt{c^2 + 49} = 30$$

Yukarıdaki çözüm çok hoşuma gitmişti. (Bu çözümün cebirsel karşılığına ve diğer çözümlerin ne olacağına bu yazının konusu olmadığından değinmeyeceğiz.) Bu çözümde söz yok, sadece bakmak yeterli elbette anlamak da. Küçük bir araştırma yaparak bu türden çok ilginç örnekler ve "kanıtlarla" karşılaştım. Bu örneklerden seçtiklerimi sizlerle paylaşmadan önce bu şekiller hakkında kısa bir bilgi vermek istiyorum.

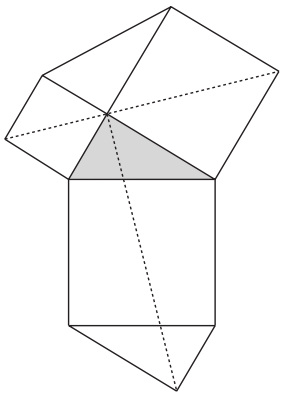
Bir problemin çözümünün veya matematiksel bir ifadenin neden doğru olduğunun şekiller veya diyagramlarla anlatılması yöntemine Amerikalı matematikçi Roger B. Nelsen "Sözsüz Kanıtlar" adını vermiş. "Sözsüz Kanıtlar" kalem kağıt kullanmadan görsel ipuçlarının izini sürerek teoremlerin kanıtının, problemlerin çözümünün nasıl yapıldığını açıklayan şekillerdir.

Bakmak ve anlamak üzerine kurgulanmış bu şekillerde teoremlerin kanıtlarını değişik açılardan incelemenin güzelliği vardır. Zayıf bir mantık zincirine sahip olsalar da bu güzel şekiller anlamanın heyecanını kolayca yaşatması bakımından ayrı bir çekiciliğe sahiptir. Beyninizde aniden bir şimşek çakar, kanıt tüm açıklığıyla kafanızda beliriverir ve içinizden "Ah evet evet şimdi anladım! Ne güzel bir şey!" nidasını sayıklayarak adeta şekillerle sessizce konuşursunuz.

Kuşkusuz, matematiksel kanıtın özelliklerini taşımayan bu "anlama" işlemlerine kanıt denilmesi olanaksızdır. Bu şekillerle yapılan iş Dostoyevski'nin *Suç ve Ceza*'sının çizgi roman biçimine getirilmesine benzetilebilir. O yüzden "Sözsüz Kanıtlar"da matematiğin takdim edilişindeki görselliğin matematikseverlere keyif vereceğini ve yararlı olacağını düşünüyorum.

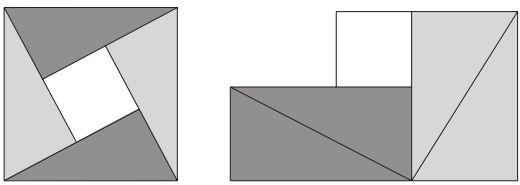
Amerika'da yayımlanan *Mathematics Magazine* dergisinden ve Roger B. Nelsen'ın *Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking* isimli kitabından seçtiğim "Sözsüz Kanıtlar"ı anlayabilmek için bazılarında ilköğretim, bir bölümünde lise ve bir kaçında da üniversite 1. sınıf matematiği gerekmektedir. Bazı şekilleri anlamak zor olabilir ama düşünerek, sabırla keşfetmenin mutluluğunu yaşmanızı öneririm. Haydi, buyurun "Sözsüz Kanıtlar" bahçesindeki görsel şölene.

Pisagor Teoremi I



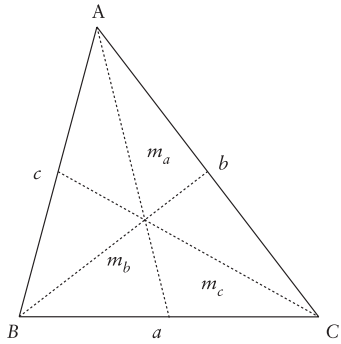
– Leonardo da Vinci (1452–1519)

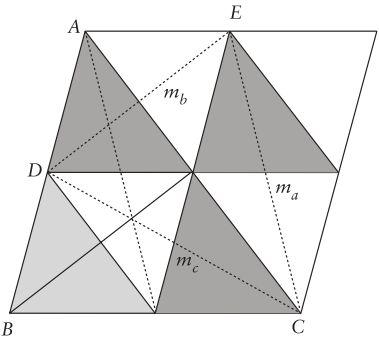
Pisagor Teoremi II



– Bhaskara
(12.yüzyıl)

Bir üçgenin kenarortaylarını kenar kabul eden üçgenin alanı



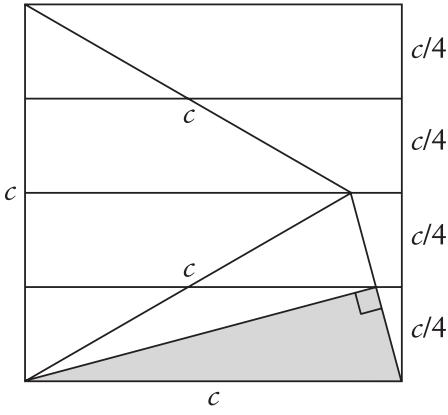


$$\text{Alan}(\overset{\Delta}{\text{DEC}}) = \frac{3}{4}\,\text{Alan}(\overset{\Delta}{\text{ABC}})$$

– Norbert Hungerbühler

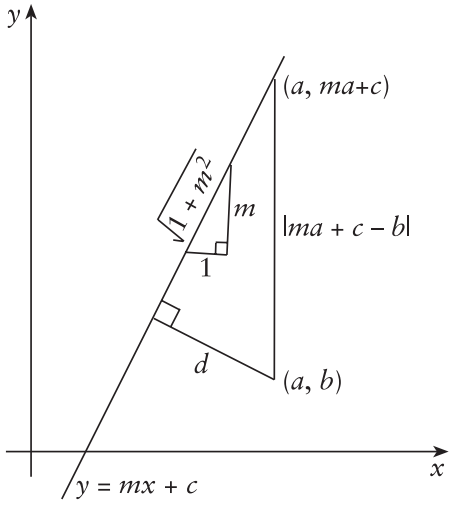
Bir dik üçgenin alanı

Bir dik üçgenin bir dar açısının ölçüsü 15° ise alanı hipotenüs uzunluğunun karesinin $\frac{1}{8}$'idir.



– Klara Pınter

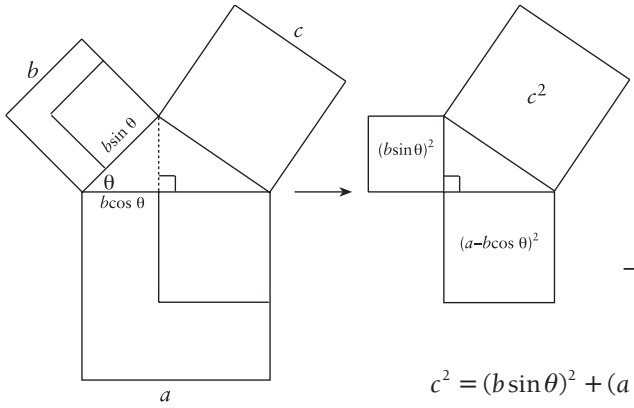
Bir noktanın bir doğruya uzaklığı



$$\frac{d}{1} = \frac{|\, ma + c - b \,|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

– R.L.Eisenman

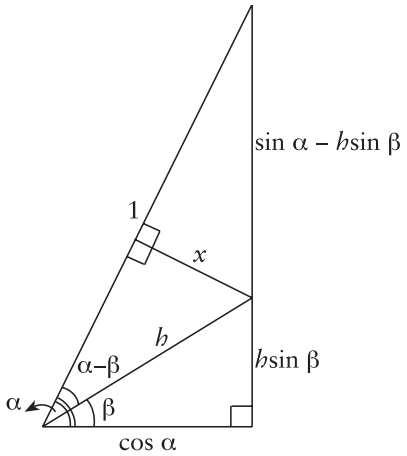
Kosinüs Teoremi

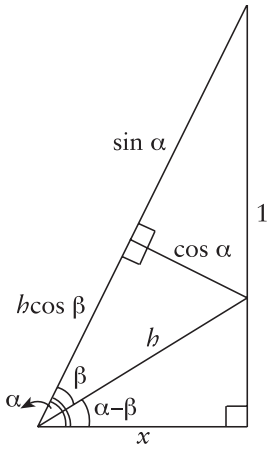


– Timothy A. Sipka

$$c^2 = (b\sin\theta)^2 + (a - b\cos\theta)^2$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

Fark formülleri





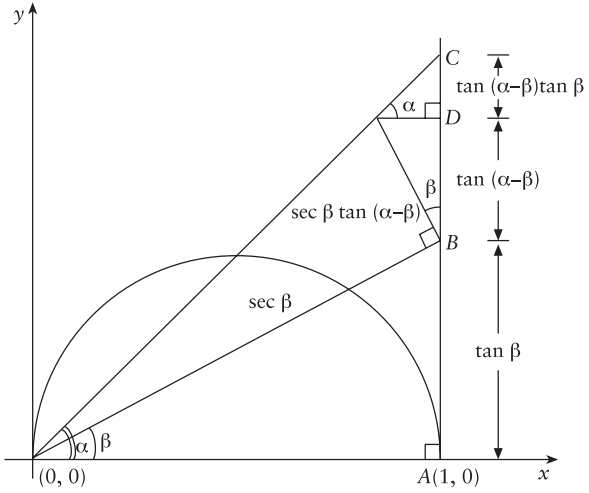
$$h = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \qquad \mathrm{h} = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$$

$$x = h\sin(\alpha-\beta) \qquad \mathrm{x} = \mathrm{h}\cos(\alpha-\beta)$$

$$x = (\sin\alpha - h\sin\beta)\cos\alpha \qquad \mathrm{x} = (\sin\alpha + \mathrm{h}\cos\beta)\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

– Leonard M. Smıley



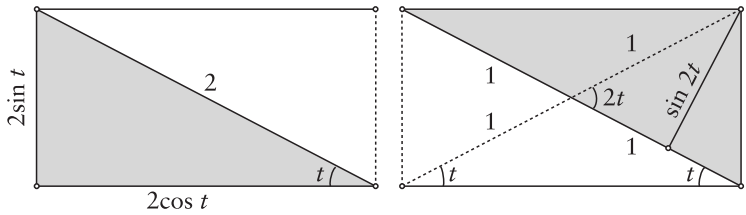
$$|AC| - |AB| = |BD| + |DC|$$

$$\tan\alpha - \tan\beta = \tan(\alpha-\beta) + \tan\alpha\tan\beta\tan(\alpha-\beta)$$

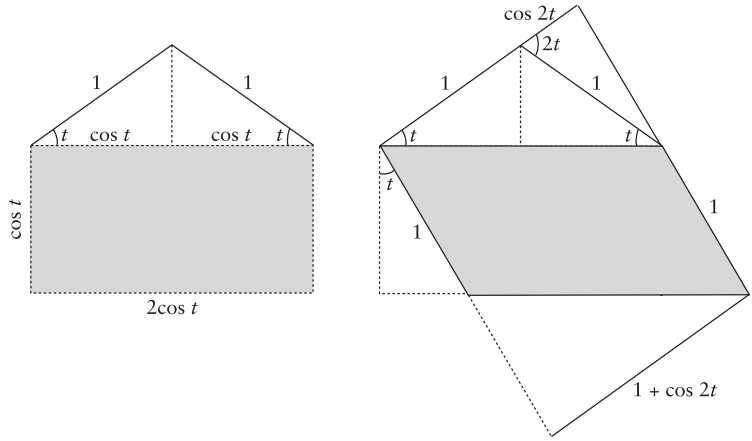
$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

– Fukuzo Suzukı

Yarım açı formülleri



2Sin*t*Cos*t* = Sin2*t*

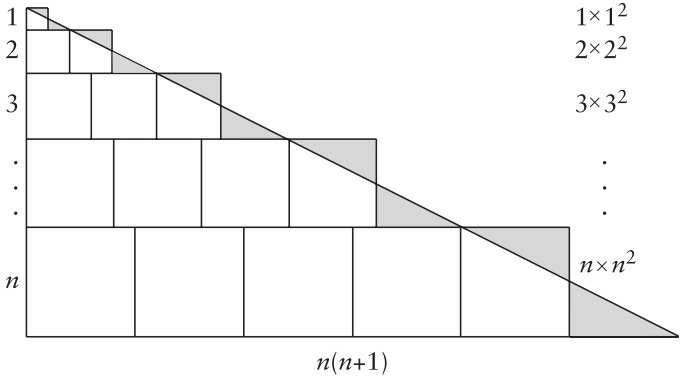


$2\mathrm{Cos}^2 t = 1+\mathrm{Cos}2t$

– Yıhnan Davıd Gau

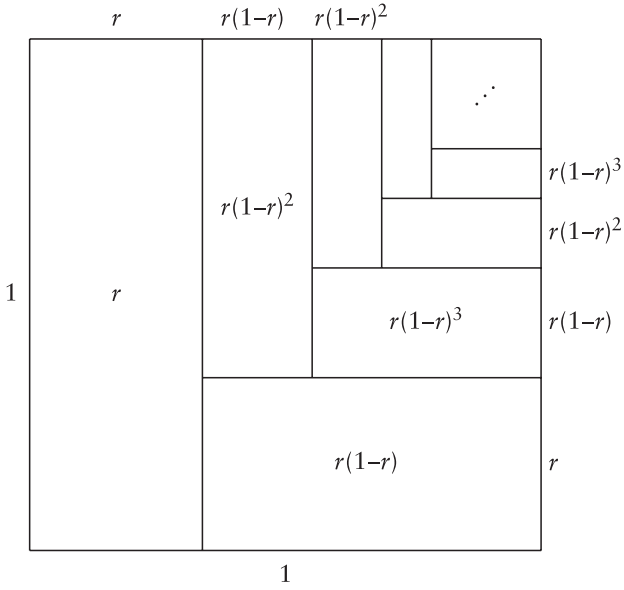
$$1+2+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$$

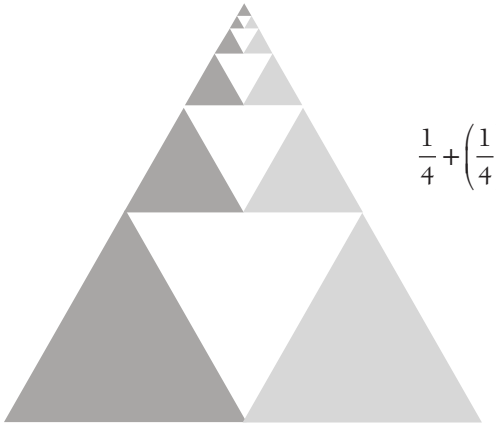


– Georg Schrage

Geometrik seriler



$$r + r(1-r) + r(1-r)^2 + \ldots\ldots = 1$$ – Warren Page

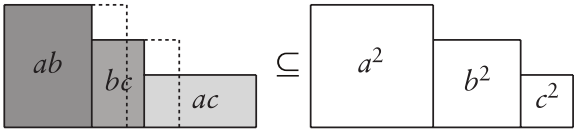


$$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots\ldots = \frac{1}{3}$$

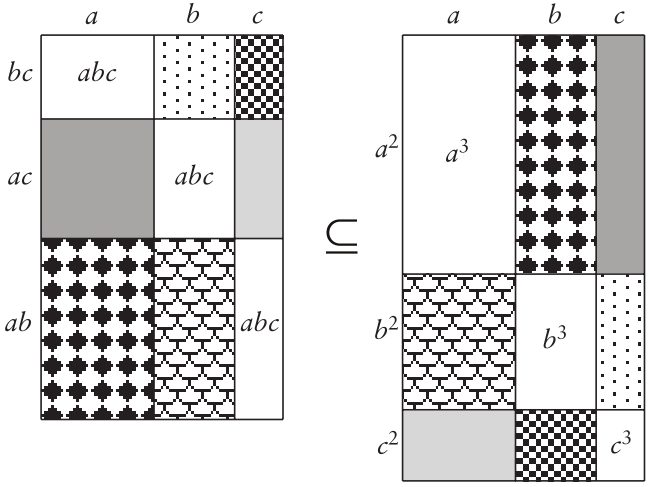
– Rıck Marby

Üç pozitif sayı için aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği

Önsav: $ab+ac+bc \leq a^2+b^2+c^2$



Teorem: $3abc \leq a^3+b^3+c^3$

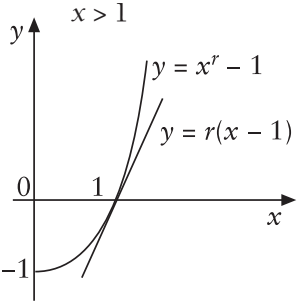


– Claudi Alsına

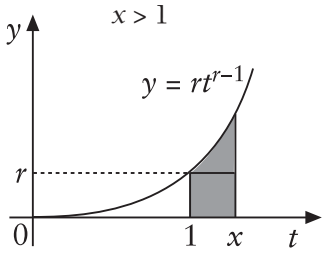
Bernoulli Eşitsizliği (İki kanıt)

$x > 0, x \neq 1, r > 1 \Rightarrow x^r - 1 > r(x-1)$

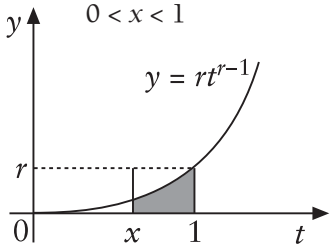
I. Kanıt (Türev)



II. Kanıt (İntegral)



$$x^r - 1 = \int_1^x rt^{r-1}dt > r(x-1)$$

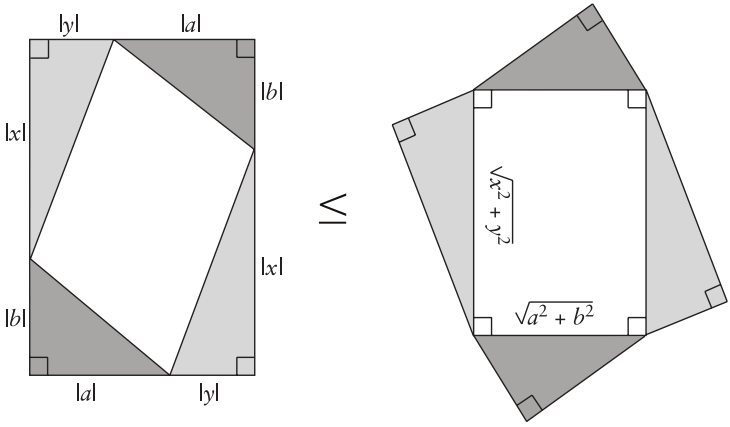


$$1 - x^r = \int_x^1 rt^{r-1}dt < r(1-x)$$

– Roger B. Nelsen

Cauchy – Schwarz Eşitsizliği

$$|ax+by| \le |a||x|+|b||y| \le \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}$$

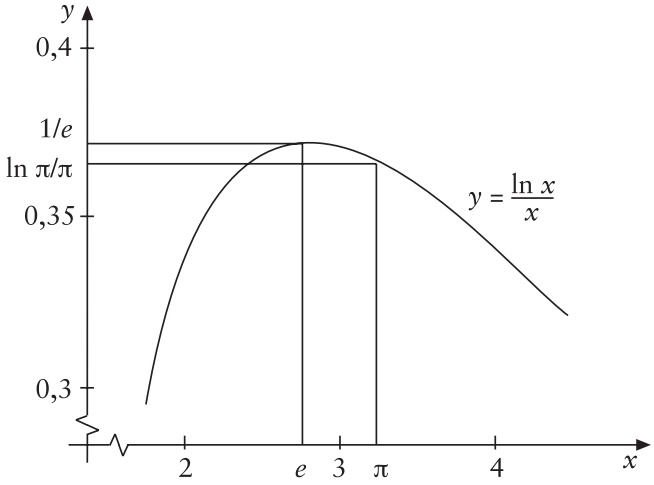


$$(|a|+|y|)(|b|+|x|) \le 2\left(\frac{1}{2}|a||b|+\frac{1}{2}|x||y|\right)+\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$|ax+by| \le |a||x|+|b||y| \le \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}$$

– Roger B. Nelsen

$e^{\pi} > \pi^{e}$



- Fouad Nakhli

KAYNAKLAR

1) Roger B. Nelsen, *Proofs Without Words: Exercises inVisual Thinking*, The Mathematical Assaciation of America, 1993
2) Cladı Alsına, "Proof Without Words", *Mathematics Magazine*, Nisan 2000
3) Nobert Hungerbühler, "Proof Without Words", *Mathematics Magazine*, Nisan 1999
4) Klara Pınter, "Proof Without Words", *Mathematics Magazine*, Ekim 1998
5) Leonard M. Smiley, "Proof Without Words", *Mathematics Magazine*, Aralık 1999

MATEMATİK ve SOYUTLAMA

Soyutlama yapabilmesi, insanı doğadaki diğer canlılardan ayıran en belirgin özelliklerden biridir. Duyularımızla algılayabildiğimiz şeyler somuttur. Elimizde tutup, ısırıp yediğimiz elma vardır, ama "elma" sözcüğü yoktur. Biz elmayı, "elma" sözcüğüyle konuşma ve düşünceye taşırız; elmanın olmadığı bir yerde elmadan söz etmemiz, elmayı düşünebilmemiz ancak bu sözcük aracılığı ile mümkün hale gelir. Çağdaş dilbilimine göre her sözcük anlam yönünden soyuttur. Bu yüzden dil, en temel soyutlama aracıdır. Somut dünyaya ait nesne ve olaylar, zihnimizde sözcük, kavram ve bunlara yüklediğimiz anlamlar üzerinden işlem görür. Bu nedenle düşünce dünyamızın zenginliği kullandığımız sözcük ve kavramların çokluğu, çeşitliliği ile doğrudan bağlantılıdır.

Elbette sadece konuşmak, yazmak değil, düşünmek, hayal etmek, resim yapmak, bir resme bakmak, okumak, eser bestelemek ve matematik yapmak gibi birçok etkinlik soyutlama gerektirir.

Kuşkusuz ki soyut düşünce standart bir süreç değildir, farklı düzey ve boyutlarda gerçekleşir. Örneğin çok istediğimiz bir şeyi hayal etmekle, bir matematik problemini çözmek arasında soyutlama süreci bakımından önemli farklılıklar vardır. Günlük hayatın içinde her insan imgelem gücüyle doğru orantılı olarak hayal eder, kavramsallaştırarak somut yaşantıyı soyut düşünce-

le yorumlar. Oysa matematik yapan birisi için durum farklıdır. Onun soyutladığı, zaten soyut olan matematiksel nesnelerdir. Darwin'e ait olduğu sanılan şu söz bu durumu çok iyi açıklar: "Bir matematikçi, karanlık bir odada orada bulunmayan siyah kediyi arayan bir insandır." Odada bulunmayan "siyah kedi", matematiksel nesnelerin ne denli soyut olduğuna ve somuttan kopukluğuna işaret ederken, "siyah kediyi arama" eylemi de matematiksel çalışmadaki soyutlamanın düzeyini anlatır.

Matematiğin soyut yapısı kendi içinde var olan, dışarıya kapalı bir sistem olmasına dayanır. Matematik, matematiksel terimler ve ilişkiler üzerinde işlem yapabilmeyi sağlayan basitten karmaşığa çok sayıda kurala sahiptir. Matematik yapacak birisinin "oyunun kurallarını" öğrenmesi gerekir. Şüphesiz kuralları öğrenmek "oyunu" iyi oynamak için yeterli değildir. Bu kurallarla matematiksel nesneler arasındaki ilişkinin nasıl kurulduğunu anlamaktır önemli olan. Bu ilişkiyi ortaya çıkarmak daha üst düzeyde bir soyutlamayla gerçekleşir. Böylesi bir soyutlamayı yapacak kişinin, üzerinde çalışılan nesne veya yapıdan daha üst seviyede bir nesnenin olabileceği sezgisine sahip olması gerekir.

Matematiğin ruhuna sadık kalarak, gereken emeği ve zamanı harcayarak matematik yapanlar adeta bir kâşif gibidirler. Keşif yolculuklarındaki amaç sadece sorulmuş sorulara doğru yanıtlar bulmak değil, aynı zamanda iyi sorular sormaktır. Belki de matematiğin sıkıcı olarak nitelendirilmesinin en önemli nedeni böylesi bir yolculuğun gerçekleşmemesidir. Keşfetmenin coşkusu ve hazzı yaşanmadığı zaman matematik, birileri tarafından bulunmuş, öğrenilmesi gereken bilgiler yığını olarak görülür.

Matematiğin doğanın ve yaşamın soyutlanmış biçimi olduğunu düşünürsek matematikle uğraşan birisinin ne denli somuttan koptuğunu ve soyut düşünceye yaslandığını daha iyi anlayabiliriz. Uzun sözün kısası, felsefenin, sanatın, edebiyatın belki biraz hakkını yiyerek, matematiğin insanlık tarihinin en güçlü soyutlama alanı olduğunu söyleyebiliriz.

Şimdi isterseniz artık laf değil iş yapalım, matematiğin en güzel soyutlama örneklerinden birini tanımaya çalışalım.

Matematiksel soyutlamanın mükemmel bir örneği: Sürreel Sayılar

İngiliz matematikçi John Horton Conway tarafından 1970'lerin başında keşfedilen (*icat edilen* demeyi tercih edenler de olabilir) sürreel sayılar birçok bakımdan büyüleyicidir. Conway, 1972'de bir öğle yemeğinde karşılaştığı bilgisayar bilimci ve matematikçi Donald E.Knuth'a keşfettiği sistemi anlatır. Knuth dinlediklerinin devrimci niteliğiyle adeta büyülenir. 1974'te *Sürreel Sayılar* isimli roman kurgusunda bir kitap yazarak hem Conway'in buluşlarının bir bölümünü anlatır hem de bu buluşların isim babası olur.

Conway, sürreel sayıları oyun teorisinin değişik yönlerini tanımlamak için keşfetmiştir, ama birçok matematikçi için bu sayıları oluşturmasındaki yöntem olağanüstüdür. Knuth, bu yöntemi şöyle betimler: "Şaşırtıcı bir hokkabazlık hüneri. Masada, kümeler kuramının birkaç aksiyomu ve boş bir şapka duruyordur. Sihirbaz Conway iki basit kuralı (tanımı) havada sallar ve boş şapkanın içinden ortaya dökülen sonsuz zenginlikteki bir sayı dokumasıdır. (…) Sistem gerçekten **gerçek üstüdür**."

Bu yazının sınırları içinde Conway'in keşfettiği sistemi bütünüyle ele almamız mümkün değil. Conway'in sihirbazlığa nasıl başladığını görmek, soyutlayarak keşfetmenin hazzını yaşamak isteyen okura sürreel sayıların başlangıcını tadımlık olarak aktarmaya çalışacağız. Bu yolculuğa, kümeler teorisinin lise düzeyindeki bilgileriyle çıkacağız.

Sürreel sayılar nedir? Bu sorunun yanıtı Conway'in havada salladığı o iki basit tanımda saklı. Şimdi bu tanımlarla büyüklü küçüklü tüm sayıları üretmeye başlayalım.

Basit ve tuhaf bir tanım

Tanım 1. *Bir sürreel sayı, elemanları önceden oluşturulmuş sürreel sayılar olan bir küme çiftidir. Bu kümeleri "sol küme" ve "sağ küme" olarak adlandırırsak, sol kümenin her elemanı sağ kümenin her elemanından büyük veya eşit değildir.*

Tanım, bir sürreel sayının bir küme çifti olduğunu söylüyor. x gibi bir süreel sayı, sol küme adı verilen X_L diye bir kümeyle, sağ küme adı verilen X_R diye bir kümenin oluşturduğu bir çifttir:

$$x = (X_L, X_R).$$

Tanımın ikinci cümlesini sembollerle ifade edelim:

$$her\ a \in X_L \text{ ve her } b \in X_R \text{ için } a \not\geq b \text{ olmalıdır.}$$

Bu tanımdaki tuhaflığı fark etmişsinizdir sanırım: Ortada yaratılmış herhangi bir sürreel sayı olmamasına karşın "önceden yaratılmış sürreel sayılar"dan söz ediliyor. Bu durumda sayıları yaratma işlemi nasıl başlıyor?

Film bu sorunun yanıtıyla başlar: Evet, yaratılışın ilk gününde, önceden yaratılmış, kullanıma hazır sürreel sayılar yok. Bu yüzden hem X_L hem de X_R boş küme! Kim demiş "Yoktan bir şey var olmaz" diye! Peki, ama insanın aklına burada bir soru daha geliyor: X_L ve X_R'nin her ikisi de boş kümeye eşitse $X_L = X_R$ olacağından yukarıdaki tanımda verilen her a, b için $a \not\geq b$ koşulu sağlanır mı? Bu sorunun da yanıtı olumlu; çünkü boş kümenin elemanı olmadığından, boş kümenin hiçbir elemanı boş kümenin hiçbir elemanından büyük veya eşit değildir. Böylece sayıları yaratmaya başladığımız ilk gündeki sayıyı elde ederiz. Bu sayıya Conway, sıfır demiştir. Boş küme yerine $\emptyset$ sembolünü kullanırsak sol ve sağ kümeler boş küme olacağından sıfırı şu şekilde yazabiliriz:

$$0 = (\emptyset, \emptyset).$$

Artık bundan sonra sıfırı sağ ve sol kümelerde kullanarak iki yeni sayı daha elde edebiliriz:

$$-1 = (\emptyset, \{0\}) \text{ ve } 1 = (\{0\}, \emptyset).$$

-1 ve 1'in sürreel sayı olabilmesi için Tanım 1'deki koşulları sağlaması gerekir. Bakalım sağlıyor mu? -1'in sol kümesi olan boş kümenin hiçbir elemanı sağ kümenin elemanı olan sıfırdan büyük eşit değil; çünkü boş kümede eleman yok. O halde -1 sürreel sayı. Tanım 1'e göre 1 de aynı şekilde sürreel sayıdır.

0, -1 ve 1'i Tanım 1 sayesinde yaratmış bulunuyoruz. Peki, sağ ve sol kümelerin ikisinin de boş olmadığı durumlarda ne olacak? İşte, Conway, bunun için Tanım 2'yi vererek küçük eşit bağıntısını tanımlıyor.

Tanım 2. x ve y sürreel sayılar ise, x küçük eşit y bağıntısı, ancak ve ancak x'in sol kümesinin her elemanı büyük eşit değil y ve x, y'nin sağ kümesinin her elemanına büyük eşit değilse doğrudur.

Bu tanımı sembolik mantık notasyonunu kullanmayan okuru da düşünerek (notasyondan ödün vererek) aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$x \leq y \text{ ancak ve ancak } X_L \not\geq y \text{ ve } x \not\geq Y_R.$$

$X_L \not\geq y$ ile X_L kümesinin hiçbir elemanının büyük eşit değil y **olmadığını** ve aynı şekilde $x \not\geq Y_R$ ile de x'in Y_R kümesinin hiçbir elemanından büyük eşit **olmadığını** anlatmak istiyoruz.

Conway, Tanım 2'yi yukarıda da belirttiğimiz gibi sol ve sağ kümelerin her ikisinin de boş kümeden farklı olduğu durumlar için veriyor; böylece bir sayının diğerinden küçük ya da eşit olup olmadığını anlıyoruz. Sonrasında da Tanım 2'yi kullanarak yeni sürreel sayılar yaratacağız.

Bu noktada bir itirafta bulunalım: Conway, hem Tanım 1'de hem de Tanım 2'de "eşit", "büyük", "küçük" sözcükleri yerine "denk", "daha fazla", "daha az" sözcüklerini kullanmayı tercih etmiş. Biz tanımların daha kolay anlaşılması için "eşit", "büyük", "küçük" sözcüklerini kullandık. Aslında her iki tanımda da "daha fazla veya denk değil" diye yazmalıydık ama bu değişiklik sürreel sayıların yaratılmasına halel getirmiyor. Conway, Tanım 2'deki "küçük eşit" kavramı yerine "daha az veya denk" yazdığından sıfırın sıfırdan az veya sıfıra denk, eksi birin sıfırdan az ama ona denk olmadığını kanıtlıyor. Bu kanıtları Tanım 2'yi kullanarak kolayca yapabiliriz:

$0 = (\emptyset, \emptyset)$ olduğunu biliyoruz, Tanım 2'ye göre $0 \leq 0$ olması için sol kümenin hiçbir elemanı 0'dan büyük eşit değil ve 0, sağ kümenin hiçbir elemanından büyük eşit olmamalıdır. Boş kümenin elemanı yoktur, bu yüzden yazdığımız doğrudur, $0 \leq 0$ olduğu kanıtlanmıştır. Benzer bir şekilde $-1 \leq 0$ ve $-1 \leq 1$ eşitsizlikleri de kanıtlanabilir.

Dikkat edilirse buraya kadarki akıl yürütmelerin hepsinde boş kümeyi kullandık. Şimdi yine birinin sol küme-

si ve diğerinin sağ kümesi boş küme olan $x = (X, \emptyset)$ ve $y = (\emptyset, Y)$ sürreel sayılarını ele alalım, Y'nin boş küme olduğu, X'in boş küme olmadığı durumlara bakalım. Bu durumda $y = 0$ olacağından Tanım 2'ye göre ancak ve ancak X'in her elemanı 0'dan büyük veya eşit değilse $x = (X, \emptyset) \leq 0$ olur. Örneğin $X = \{-1\}$ ise $(X, \emptyset) \leq 0$ olur. Buradan, negatif ve pozitif sayıların nasıl yaratılacağını belirlemiş oluyoruz. Yani X kümesinin elemanları sıfır veya sıfırdan büyük sürreel sayılar ise $(X, \emptyset)$ pozitif olur. Böylece sıfır ile pozitif sayıları negatif sayılardan ayırmış oluyoruz.

Bundan sonra yapılacak ilk iş elimizde var olan –1, 0 ve 1 sayılarıyla Conway'in vermiş olduğu iki tanımı kullanarak yeni sürreel sayılar yaratmak. Boş kümeyi ve –1, 0 ve 1 sürreel sayılarını sol ve sağ kümelerde kullanarak 17 yeni sürreel sayı elde edebiliriz:(Tanım 1'i unutmayalım.)

$$(\{-1\},\emptyset),\ (\emptyset,\{-1\}),\ (\{1\},\emptyset),\ (\emptyset,\{1\}),$$
$$(\{-1,0\},\emptyset),\ (\emptyset,\{-1,0\}),\ (\{0,1\},\emptyset),\ (\emptyset,\{0,1\})$$
$$(\{-1,1\},\emptyset),\ (\emptyset,\{-1,1\}),\ (\{-1,0,1\},\emptyset),$$
$$(\emptyset,\{-1,0,1\}),\ (\{-1\},\{0\}),\ (\{0\},\{1\}),$$
$$(\{-1,0\},\{1\}),\ (\{-1\},\{0,1\}),\ (\{-1\},\{1\}).$$

Yukarıdaki sürreel sayıların karşılık geldiği sayıları bulabiliriz. Örneğin verdiğimiz tanımlardan,

$$(\{1\},\emptyset) = (\{0,1\},\emptyset) = (\{-1,1\},\emptyset) = (\{-1,0,1\},\emptyset) = 2,$$
$$(\emptyset,\{-1\}) = (\emptyset,\{-1,0\}) = (\emptyset,\{-1,1\}) = (\emptyset,\{-1,0,1\}) = -2.$$

olur. Öte yandan *boşkümenin* bulunmadığı küme çiftlerinden oluşan sürreel sayılar da var. Örneğin $(\{0\}, \{1\})$ gibi. Conway, burada da sihirbazlığa devam ederek Tanım 2'den aşağıdaki eşitsizlikleri yazıyor.

$$0 < (\{0\},\{1\}) \quad \text{ve} \quad (\{0\},\{1\}) < 1.$$

Buradan, heyecan içinde yeni bir sayı daha elde ediyoruz: $(\{0\},\{1\}) = \frac{1}{2}$. Aynı yolla $(\{-1\},\{0\}) = -\frac{1}{2}$ sayısını da bulabi-

liyoruz. Tabii ki yukarıda yazdığımız 17 sürreel sayı içinde $\frac{1}{2}$ ve $-\frac{1}{2}$ sayılarına karşılık gelen başka sayılar da var.

Böylece –1, 0, 1 sayılarını kullanarak –2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ ve 2 sayılarını, sürreel sayıları yaratma işlemimizin ikinci gününde dünyaya getirmiş olduk. Bu sayılardan hareketle yeni sürreel sayılar yaratmanın sistematiğini bulmayı meraklı okurun araştırmasına bırakıyoruz.

Sürreel sayılar filminin fragmanı burada sonlanıyor. Yukarıda anlatılanlar bu teorinin başlangıcı bile sayılmaz. Bu uzun filmi izleyecek olanlar sürreel sayıların "gün gün" nasıl yaratıldığını ve reel sayılardaki işlemlerin, teoremlerin bu sistemde de geçerli olduğunu hayranlıkla göreceklerdir.

Conway'in, oyun teorisini geliştirmek amacıyla keşfettiği bu kuramın matematiksel soyutlamanın büyüleyici örneklerinden biri olmasının yanı sıra, cebir ve analizle de bağları bulunmaktadır.

Kümeler teorisinin basit birkaç aksiyomu, iki basit tanım ve bir "sihirbazlık oyunu". Knuth, Conway'i bir sihirbaza benzetmiştir. Gerçekten, bir sihirbazın gözümüzün önünde mendilleri bir güvercine "çevirmesi" ya da renkli kâğıt parçalarını renkli şemsiyelere "dönüştürmesi"ni hayretle izleriz. Sihirbazın sergilediği aslında bir illüzyondur ve somut nesneler dünyasında bizi şaşırtır, hayal gücümüzü zorlar. Matematik yapan birisi de matematiksel çıkarımlarla soyut nesneleri başka soyut nesnelere çevirir ama illüzyon yaratmanın tersine bize bunun nasıl olduğunu kanıtlar. Bunu yapabilmesi sağlam bir matematik donanımı, sezgisel düşünme ve yüksek bir soyutlama kapasitesi ile mümkün olabilir. Conway'in sürreel sayıları keşfederken yaptığı da tam olarak budur.

KAYNAKLAR

1) Knuth, D.E, *Sürreel Sayılar*, Çev. Budak, M, Nar Yayınları, 1995.

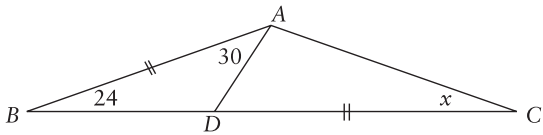
2) http://www.tondering.dk/claus/surreal.html.

DENİZ'E MEKTUP

Cevapsız sorunun boynu bükük kalır
Hemen anlar yetim olduğunu
Metin Altıok

Sevgili Deniz,

Sorduğun soruyla uğraşıyorum. Gecenin sabaha yakın saatleri... Birçok yol denedim, daha da deneyeceğim. Umutsuzluğa kapılmadan... Oysa ne kadar rahattım "Öğretmenim şu soruyu çözebilir misiniz?" dediğinde. Daha önceden tanıdığım, çözümünü hemen görebileceğim bir sorudur diye düşünmüştüm. Olmadı. O andan beri uğraşıyorum. Yolda yürürken, yemek yerken hep sorduğun soru vardı aklımda. Evdekiler hemen anladılar, eve bir matematik sorusunu misafir olarak getirdiğimi.



$|AB| = |DC|$ ise x kaç derecedir?

Çözümü sen de en az benim kadar merak ediyordun. Matematik öğretmenlerinin yetenek ve bilgisini ölçmek için soru

soran öğrencilerden olmadığını biliyorum. Sakın yanlış anlama, öğretmeni sınamak için soru soran öğrencilere, mesleğimin ilk yıllarını saymazsak, hiç tepki göstermedim. Ben de öğrencilik yıllarımda nedense bu oyunu oynamaktan hoşlanırdım. Bu oyunu çekici kılan neydi bilmiyorum. Belki de günlerce uğraşıp altından kalkamadığım problemleri bir çırpıda çözüyor olmalarını kıskanırdım. Acaba her soruyu çözebilecekler miydi? Zor olduğunu düşündüğüm sorular bulup matematik öğretmenlerini tek tek dolaştığımı hatırlıyorum. Matematiği sevmeden öğretmenlik yapanlar soruya şöyle bir göz atıp, "Gereksiz bir soru!" diyerek geçiştirirlerdi. Kimisiyse çözmek için uğraşır, bir yere kadar gelip takılırlardı. Ardından da, kaybeden birinin ezikliğiyle, "Bu akşam biraz daha uğraşayım, çözümü yarın getiririm" derlerdi (sanırım bugün benim için de durum buydu!) Kimileriyse "Şöyle yapsak nasıl olur?" gibi sorularla çözüme beni de ortak ederlerdi. Onlarla birlikte, bilinenle bilinmeyen arasındaki o zorlu yolculuğu ne severdim. Hiç unutmuyorum, bir öğretmenime daha önce üzerinde oldukça uğraştığım bir limit sorusu sormuştum. İlk adım olarak değişken değiştirme yöntemini uyguladı ama belirsizlik devam ediyordu, ikinci kez değişken değiştirmeyi önerdim. Birkaç adım sonra soru önümüzde diz çöküp beyaz bayrak sallamaya başladığında, öğretmenimin "Bravo, çok güzel, tebrikler" sözünden duyduğum mutluluğu dün gibi anımsıyorum. Belki de matematiği böylesi öğretmenlerimin sayesinde daha çok sevdim. Onlar problem çözmeyi kendi başına bir amaç değil, bir öğrenme ve öğretme aracı olarak görüyorlardı. O yüzden zaman zaman soruyu çözememiş olmaları, çıkmaz sokaklarda sıkışıp kalmaları onlara olan saygımı hiç azaltmazdı. Çünkü onlar için bir problemle uğraşmak bir tür "kaybetme ya da kazanma" sorunu değildi.

Mutlaka herkes problemin şah damarına basıp sonucu bulmak ister (Ah! ben de şu an o şah damarını bir bulabilsem!) "Zor" bir soruyu çözmenin verdiği haz matematiği seven biri için küçümsenmeyecek bir doyumdur. Ancak çoğu öğrenci (hatta öğretmen) eğitim sisteminin ezberci yapısından, test çözme alışkanlığından, düşünmeye, araştırmaya, keşfetmeye önem

vermiyor. Oysa matematiğin çok sayıdaki amaçlarından biri de insanların soyut düşünebilme yeteneğini geliştirmektir. O yüzden diyorum ki sevgili Deniz: İlkinde, ikincisinde, üçüncüsünde başarılı olamasak da tekrar tekrar denemeliyiz. "Tekrar dene, yine yenil, bir daha dene daha iyi yenil" sözünde olduğu gibi ben de şu an yenile yenile deniyorum.

Mektubuma kısa bir süre için ara vermek zorundayım; çünkü aklıma açıları 24 ve 30 derece olan üçgende (hatırlarsın sanırım) Sinüs Teoremini uygulama fikri geldi.

Ah! Sevgili Deniz yine olmadı, karşıma oldukça karmaşık bir trigonometrik denklem çıktı. Şimdilik bıraktım...

…

Bir anlamda biz öğretmenlerin yaşamı Edip Cansever'in "Sordular/Sorular benim insanlarımdır" dizesinin bir izdüşümü. Bu izdüşümde çözülen ya da çözülemeyen sorular, sevinçler ya da düş kırıklıkları, "Öğretmen soruyu çözdü" sesi ya da "Aaa öğretmen soruyu çözemedi" sessizliği hep oldu, hep olacak.

...

Sevgili Deniz, artık gün ağardı. Sorun yine güne yetim olarak giriyor. Umarım sen çözmüşsündür. Ben şu an problemi ve kendimi dinlendirebilmek için büyüklerin "yastığına danış" öğüdüne uyarak "biraz uyku" diyorum.

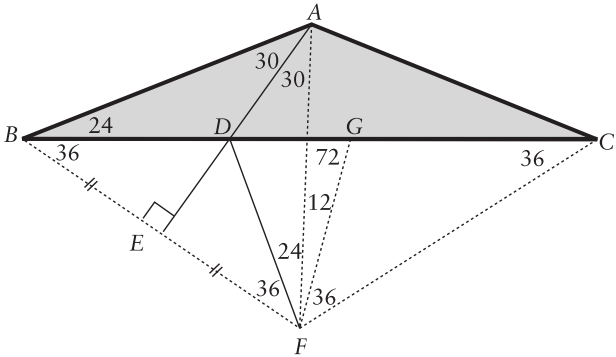
Sevgiler.

Bu Mektuptan Bir Hafta Sonra...

Deniz, sorduğun soruyu bu gecenin sabaha yakın saatlerinde çözdüm. Şu an soruyu çözmenin doyumsuz hafifliği içindeyim. Hatırlarsan geçen hafta daha basit, benzer bir problem bulmaya çalışmıştık. İşte, biraz önce aklıma açıları 72, 72 ve 36 derece olan üçgende uygulananlar geldi. O problemin çözümünü bu soruda kullanmak işe yaradı. Sorunun çözümünü aşağıda veriyorum. Daha basit bir çözüm bulduğunda bana iletirsen sevinirim.

Çözüm: B'den AD'ye BE dikmesini inelim. $|BE| = |EF|$ olacak şekilde BE'yi uzatalım. Kolayca görüleceği üzere, ABF üçgeni eşkenar olacaktır.

Demek ki, $m(\widehat{DBF}) = (\widehat{BFD}) = 36^\circ$. BC üzerinde $|BF| = |BG|$ olacak şekilde G noktası alalım. *BGF* üçgeni ikizkenar olduğundan, $m(\widehat{BGF}) = 72^\circ$, *BDF* üçgeni de ikizkenar olduğundan, $m(\widehat{BFD}) = 36^\circ$ ve $m(\widehat{FDG}) = 72^\circ$ olur.

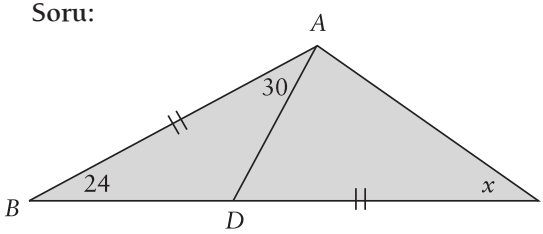


Son iki sonuçtan *FDG* üçgeninin ikizkenar olduğu çıkar. O halde $|FG| = |DF| = |BD| = |BG| - |DG| = |DC| - |DG| = |GC|$, dolayısıyla $m(\widehat{GCF}) = (\widehat{GFC}) = 36^\circ$ dir. Demek ki *BFC* üçgeni ikizkenardır. Bundan $|AF| = |BF| = |FC|$ çıkar, yani *AFC* üçgeni de ikizkenardır ve taban açılarının ölçüleri 66'şar derece olur. Bundan da $m(\widehat{BCA}) = 66 - 36 = 30^\circ$ bulunur.

Diğer Çözümler

Bu mektup *Matematik Dünyası* Dergisi'nin 2003-III sayısında yayımlanmıştır. O yazıda yer alan, bu soruya ait farklı çözümler aşağıda verilmiştir.

Soru:



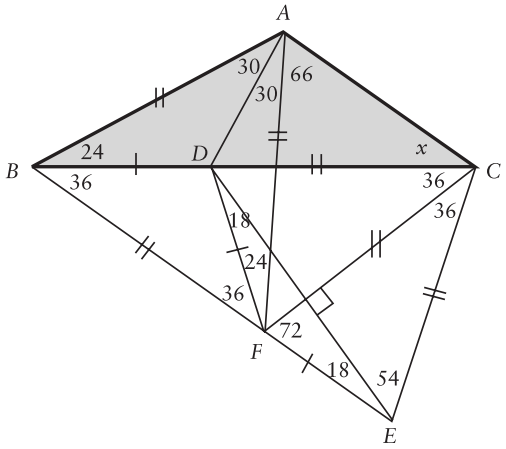
$m(\widehat{CBA}) = 24^\circ$

$m(\widehat{BAD}) = 30^\circ$

$|AB| = |DC|$ ise

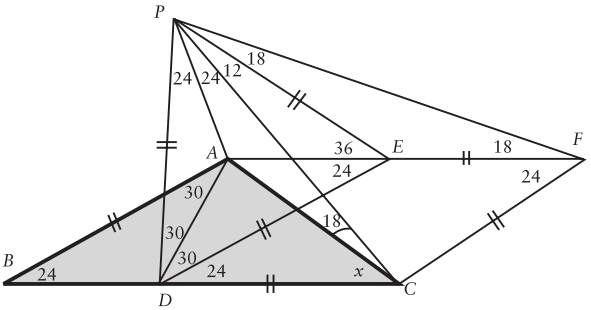
$m(\widehat{ACB}) = x = ?$

Çözüm 1: Mustafa Yağcı



ABF eşkenar üçgeni oluşturulur. *BF* doğru parçası *BD* kadar uzatılıp *BEC* ikizkenarı oluşturulur. Buradan *EFDC*'nin deltoid olduğu görülür. $|CE|=|CF|=|CD|=|AF|$ olduğundan $x = 30°$'dir.

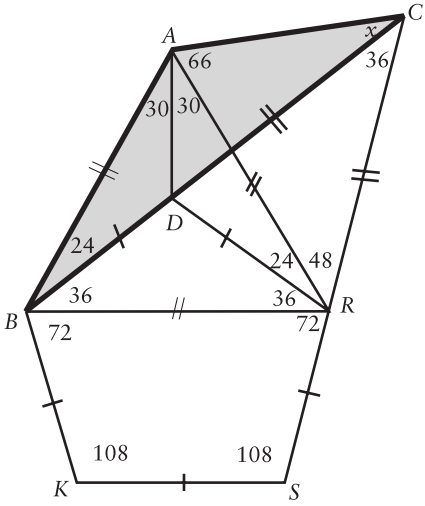
Çözüm 2: Hasip Yılmazoğlu



ABDE paralelkenarı ile *EDCF* eşkenar dörtgenini oluşturalım. Şimdi de PDE eşkenarını oluşturalım. *PDC* ve *PEF* ikizkenar üçgenleri oluşur. $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{APC}) = 24^\circ$ olduğundan *APFC* kirişler dörtgenidir.

O halde $x = m(\widehat{DCP}) - m(\widehat{ACP}) = 48 - 18 = 30^\circ$ dir.

Çözüm 3: Mustafa Yağcı



Düzgün bir *KSRDB* beşgenini çizelim. *B* ile *R*'yi birleştirelim. [*BD* ışını ile [*SR* ışınının kesişim noktasına *C* diyelim. Tüm açı değerlerini şekle yazalım. Şimdi bir kenarı *BR* olan şekildeki gibi *ABR* eşkenar üçgenini oluşturalım. *AD* eşkenar üçgenin açıortay doğrultusundadır. İşte, oluşan *ABC* üçgeni sorumuzun kendisidir.

SIK SORULAN YANLIŞ SORULAR

Nedenini, nasılını sorma kabul et, zaman kaybetme diğer soruya geç, fazla düşünme, anlamasan da olur. Ülkemizdeki lise matematik öğretimini bu sözcüklerle özetlersek pek abartmış olmayız sanırım. Verili bilginin sorgulanmasını istemeyen bir eğitim sisteminde merak edip soru sormak da pek kolay değil elbette. Ama bütün bu olumsuz koşullara karşın sorgulayarak, keşfederek öğrenmeyi seçen, adeta sisteme itiraz eden öğrenciler de var. Bu denli tutucu bir yapının içinden araştırma sezgisi olan, soru sorabilen öğrencilerin çıkıyor olmasına hep şaşırmışımdır. Bu öğrenciler tüm engellere rağmen bir konuya nüfuz edebilmeyi başarıyorlar ve ısrarla soruyorlar: Neden? Nasıl? Ama çoğunluğun durumu maalesef böyle değil. Neredeyse tüm öğrencilerin amacı çoktan seçmeli sınavlarda başarılı olma hünerini kazanabilmek. Üniversiteye giriş sınavlarına hazırlanırken sadece doğru cevabı bulabilmek için yoğunlaşmak gerekiyor, doğru soruyu sormak için değil. Örneğin limit kavramını tam olarak anlamadan yüzlerce limit sorusu çözen bir öğrencinin aklına "Sonsuz eksi sonsuz neden sıfır değil?", "1 üzeri sonsuz niçin 1 değil?" gibi yanlış sorular takılabiliyor. Matematiksel değeri olmayan bu tür soruları sınavlarda çok başarılı olmuş öğrenciler de soruyor. O zaman daha iyi anlıyorum öğrencilerin hiç suçu olmadığını, başarı odaklı bu sistem sayesinde öğrenciler matematiği değil doğru seçeneği işaretlemeyi öğreniyorlar.

Üniversite sınav sonuçlarına göre ilk iki binin içinde yer alan bir öğrencinin "1 üzeri sonsuz neden 1 değildir?" sorusunu yanıtlarken uzun açıklamalar yaptığımı anımsıyorum. Bir türlü ikna olmamıştı. Belki de ben iyi anlatamamıştım ve o gün bu tür sorulara bir yanıt yazmaya karar verdim. İşte bu yazı, öğrencilerin "sonsuz" ve limit kavramıyla ilgili en sık sordukları üç soruya dilim döndüğünce verdiğim yanıtlardan oluşuyor. Öklid geometrisiyle ilgili olan ilk soru diğer iki sorudan farklı. Bazı yazarlar bu soruyu bir paradoks olarak ele alarak felsefi boyutta incelemişler, ama biz sorunun bu yanıyla ilgilenmedik. Son iki soruyu yanıtlarken popüler matematik dilini kullandığımızdan maalesef limit teorisinden ödün vermek zorunda kaldık. "Sonsuz büyük" kavramını sezgisel yöntemlerle açıklamaya çalıştık.

Şimdi, "Yanlış sorular da yanıtlanmalı" diyelim ve ilk soruyla başlayalım.

Soru 1. *Öklid geometrisinde noktayı tanımlarken hiçbir parçası olmadığını, boyutsuz, yani boyutunun 0 olduğunu söylüyoruz. Doğrunun ise sonsuz sayıdaki noktadan oluştuğunu, boyutunun 1 olduğunu belirtiyoruz. Nasıl oluyor da boyutu 0 olan noktaların birleşiminden boyutu 1 olan doğru elde ediliyor? Bu durum sonsuz sayıdaki 0'ı toplayarak sonucu 1 bulmaya benziyor. Bir çelişki yok mu?*

Öncelikle sorudaki bir yanlışı düzeltelim: Matematikte nokta ve doğru gibi bazı kavramlar tanımsızdır, sadece izah edilebilirler. Bu yüzden yukarıdaki sorunun giriş cümlesinde "noktayı tanımlarken" sözcükleri yerine "noktayı açıklarken" ifadesi kullanılmalıydı.

Matematikte bazı kavramlar temel olarak kabul edilmiştir, tanımlanamazlar ve bunların sayısı mümkün olduğunca az tutulmuştur. Nokta, doğru, düzlem gibi tanımsız elemanların varlık nedeni, "tanım zinciri"nde bir son halkanın bulunmasıdır. Son halkadaki kavramları tanımlamaya kalktığımızda belirsizliklerle ve bir takım problemlerle karşılaşırız. Örneğin noktayı "hiçbir parçası olmayan şey" olarak tanımlarsak bu kez de "parça" kavramını tanımlamamız gerekir ve arkasından başka açıklamalar

da yapmak zorunda kalırız. Bunun için matematikte yapılan tanımlar akılda soru bırakmayacak kadar belirgin olmalıdır.

Öklid geometrisindeki birçok kavramın esin kaynağı doğa ve insan yaşantısıdır. Ama ortaya çıkan matematiksel nesneler ussal olup, soyuttur. Örneğin iki farklı yer arasındaki mesafeye gözlerimizi hızlı bir biçimde hareket ettirerek baktığımızda yapmış olduğumuz eylemin hafızamızdaki karşılığı matematiksel soyutlama için önceden edinilmiş önemli bir deneyimdir. Bu soyut bir deneyimdir; çünkü hafızamız adeta orada olmayan bir doğruyu öngörür. Tıpkı Öklid geometrisinin genişliği ve derinliği olmayan doğruları gibi.

Öklid, nokta kavramını da soyutlayarak elde etmiştir. Nokta, doğada ve yaşamda yoktur, bir "düşünce", bir "idea"dır. Biz günlük yaşamda noktayı kalemin kâğıtta bıraktığı en küçük iz olarak algılarız, ama büyüteçle baktığımızda bizim küçük zannettiğimiz bu izin bir yer kapladığını görürüz ve daha küçük bir iz bırakabiliriz. Daima yapılandan daha küçük bir iz bıraksak bile bu izlerin bir eni, boyu olacaktır. Bizim kalemle kâğıtta bıraktığımız "en küçük iz" noktanın kendisi değil, sadece noktaya ait bir işarettir. Öklid, eni, boyu olmayan "iz"leri düşünerek doğada bulunmayan, uzayda yer kaplamayan nokta kavramına ulaşmıştır. Öklidyen nokta geometrinin düşünsel uzayında yer alır.

Bütün geometrik şekillerin yapısındaki temel kavram nokta olduğuna göre doğru, düzlem, açı, kenar, üçgen, çember gibi matematiksel nesneler de içinde yaşadığımız dünyada değil, düşüncemizde vardır. Öklid'in, "noktalardan oluşan, genişliği olmayan uzunluk" olarak ifade ettiği doğru, bizim günlük yaşamda kâğıdın üzerine çizdiğimiz doğru değildir.

Şimdi soruya dönelim. Soru, geometrinin soyut yapısını atlayarak doğada ve günlük yaşantımızdaki sezgilerimiz üzerinden bir çelişkinin olduğunu savlıyor. Oysa Öklid geometrisi yukarıda da anlatmaya çalıştığımız gibi soyuttur. İçinde yaşadığımız dünyada boyutu 0 olan bir nesne yoktur. Dolayısıyla böylesi nesnelerin bir araya getirilmesi söz konusu olamaz. Ama geometride adına nokta dediğimiz boyutu 0 ve soyut olan

bir matematiksel nesne vardır ve pekâlâ bu noktaların birleşiminden boyutu 1 olan bir matematiksel nesne elde edebiliriz. Bu sözleri bir örnekle açıklayalım: Bir $[AB]$ doğru parçasını üzerinde aldığımız bir C noktasıyla ikiye bölerek $[AC]$ ve $[CB]$ doğru parçalarını elde edelim. Bu durumda C noktası hem $[AC]$'nin hem de $[CB]$'nin üzerindedir. Oysa az önce $[AC]$ ve $[CB]$'nin birleşiminden oluşan $[AB]$'nin üzerinde bir tek C noktası vardı. Demek ki biz, "doğru, noktaların kümesinden oluşur" derken noktayı bir büyüklük olarak değil, bir yeri belirlemek için kullanıyoruz. Söylemek istediğimiz şey, "Noktaların uzunlukları toplamından doğru parçasının uzunluğu elde edilir" demek değil.

Tanımsız elemanlar, tanımlar, aksiyomlar ve teoremlerin hepsi geometrinin soyut yapısına uygun ve bu yapı içinde tutarlı matematiksel "gerçekler"dir, bulunduğumuz dünyanın "gerçek"leriyle aynıymış gibi bir arada ele alınamazlar. Birçok paradoksun ortaya çıkışındaki gibi bu soruda da çelişki gibi görünen yan, dış dünyanın nesneleriyle matematiksel nesneler arasında birebir bağ kurarak matematiksel adımların açıklamasını yapma yanlışıdır.

Ayrıca bir not düşelim: Matematikte Öklid geometrisinden bağımsız olan boyut kavramı daha da soyuttur ve sezgilerimizle ters düşer. Alman matematikçi Georg Cantor 1878'de bir doğru parçasının üzerindeki "nokta sayısının" bir kare üzerindeki "nokta sayısına" eşit olduğunu kanıtlayarak boyut kavramını altüst etmiş ve şaşkınlığını "Görüyorum, ama inanamıyorum" sözüyle ifade etmiştir.

Sorunun son cümlesinde yer alan "sonsuz sayıda 0'ı toplayarak sonucu 1 bulma" benzetmesindeki yanlışlığın ne olduğu diğer soruların yanıtları içinde bulunacak.

Soru 2. *Sonsuz eksi sonsuz neden sıfır değil?*

Bu soru bana hep şu şarkı sözünü anımsatır: "Kendimi kendimden çıkarsam sıfır kalmaz, bu matematik bizi kandırıyor hocam." Kendimizi "sonsuz" kabul edersek sorunun yanıtı şarkı sözünde veriliyor sanki!

Öncelikle şu soruyu yanıtlamalıyız: "sonsuz eksi sonsuz" ($\infty-\infty$) yazılımıyla ne anlatılmak isteniyor? Eğer "sonsuzu" bir matematiksel nesne olarak kabul edip çıkarma işleminden söz ediyorsak, bu imkânsızdır; çünkü "sonsuz" kavramı sayılar, kümeler, fonksiyonlar gibi bir matematiksel nesne değildir. Matematiksel nesnelerin adları vardır. Örneğin sayıları 1, 2, 3 gibi simgelerle adlandırırız. Oysa "sonsuz" sözcüğü veya ∞ simgesiyle bir nesnenin adını değil bir durumu anlatırız. Örneğin matematiksel sonsuzun gerçek anlamını bir kenara bırakırsak, bir değişkenin sürekli büyüyor olmasını "sonsuz" sözcüğüyle niteleyebiliriz. Bu yüzden "sonsuz" sözcüğünü matematikçiler ad olarak değil, sıfat olarak kullanırlar. Bunun için "sonsuz eksi sonsuz" demek veya "($\infty-\infty$)" yazmak aslında doğru değildir. Ama gösterim kolaylığı yüzünden birçok kitapta "sonsuz eksi sonsuz" ($\infty-\infty$) ifadesi yer alır. Aslında bu ifadeyle anlatılmak istenen, "iki farklı değişken sürekli büyüyorsa, bu değişkenlerin farkı" dır.

Şimdi şu soruyu soralım: İki farklı değişken sürekli büyüyorsa, bu değişkenlerin farkı için ne söylenebilir? Bu fark sıfır mıdır? Bu soruların yanıtlarını limit hesabına girmeden, örneklerle sezgisel olarak vermeye çalışacağız. Örneğin x'e bağlı x^2 ve x^3 değişkenlerini ele alalım ve her iki değişkeni de x'e vereceğimiz değerlerle büyüterek x^2-x^3 farkındaki değişikliği inceleyelim.

$x = 1$ için bu fark 0,
$x = 2$ için -4,
$x = 10$ için -900,
$x = 100$ için -990.000 değerlerini alıyor.

Görüldüğü gibi her iki değişken de büyürken ikisinin farkı negatif değerler alarak küçülüyor. Burada "Sonuç ne olur?" sorusu yanıtsızdır, çünkü bu farkın belli bir değeri yoktur, sürekli küçülür. Matematikte bu fark için "eksi sonsuza gider veya ıraksar" diyebiliriz ama bu anlatımla demek istediğimiz : "eksi sonsuz diye bir yer var, bu fark oraya gider" demek değildir, bu farkın sürekli küçüldüğüdür.

Şimdi de yine x'e bağlı olarak sürekli büyüyen $\sqrt{x^2+2x+2}$ ve x değişkenlerini ele alalım ve her iki değişkeni de x'e vereceği-

miz değerlerle büyüterek $\sqrt{x^2+2x+2}-x$ farkındaki değişikliği inceleyelim.

x = 1 için bu fark yaklaşık olarak 1,23606,
x = 2 için yaklaşık olarak 1,16227,
x = 10 için yaklaşık olarak 1,04536,
x = 100 için yaklaşık olarak 1,00495,
x = 1000 için yaklaşık olarak 1,00049 değerlerini alıyor.

Acaba x'i daha da büyüttüğümüzde bu fark için ne söyleyebiliriz? Gittikçe 1'e yaklaşıyor, ama 1'den daha küçük bir değer alabilir mi? Bu sorulara kesin yanıtlar limit hesabıyla verilebilir, ancak biz sezgisel olarak bu farkın 1'e yaklaştığını (yakınsadığını) görebiliyoruz. Meraklı okur limit hesaplama tekniklerini kullanarak bu farkın 1 olduğunu kanıtlayabilir.

Sürekli büyüyen (azalan da olabilir) iki farklı değişkenin farkı değişkenlere bağlıdır. Yukarıda verdiğimiz örneklerde de görüldüğü gibi değişkenleri değiştirdikçe bu farkın yakınsadığı değerler de değişiyor, hatta" artı sonsuz" veya "eksi sonsuza" ıraksayabiliyor. Bunun için "sonsuz eksi sonsuz" olarak ifade edilen fark, farklı değişkenlerde farklı sonuçlar verdiğinden belirsizdir.

Soru 3. *1'in bütün kuvvetleri* 1 *dir. O ha1de* 1 *üzeri sonsuz neden* 1 *değildir?*

Bu soru da bir önceki sorudaki gibi "sonsuz" kavramının anlaşılmamasından kaynaklanıyor. "Sonsuzu" pozitif bir tamsayı kabul edip 1'i sonsuz kez yan yana yazıp çarparak 1 sonucuna ulaşılacağı düşünülüyor. Bu düşünceye göre "sonsuz" bir sayı olarak görüldüğünden 1 üzeri sonsuz da bir sayı ve 1'e eşit. Oysaki matematikte 1 üzeri sonsuz diye bir sayı yok.

1 üzeri "sonsuz" olarak bilinen ifadeyi belirsizlik olarak incelemeden önce soruyu soranın beklentisini karşılamak üzere 1^x'i ele alalım ve x değişkenini sürekli büyütelim. Elde edilen değerler hep 1'dir, ama bu sonuç bize 1 üzeri "sonsuz" gibi bir sayının varlığını göstermez, x değişkeni sürekli büyürken ifadesinin sabit kaldığını ve 1'e yakınsadığını anlatır.

Şimdi limit hesaplamalarında karşımıza çıkan "1 üzeri sonsuz" belirsizliğini ele alalım. Ama bir kez daha belirtelim ki matematikte "1 üzeri sonsuz" diye bir kavram yoktur. Eğer bir matematikçi "1 üzeri sonsuz" diyorsa anlatmak istediği şey şudur: Bir üstel fonksiyonun tabanı 1'e yakınsarken üssü de "sonsuza" ıraksıyorsa bu durum bir belirsizlik halidir.

Örneğin,

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

ifadesinde x değişkenini sürekli olarak büyüttüğümüzde $1/x$ sıfıra yakınsayacağından taban 1'e yakınsar ve üs de sonsuza ıraksar. Aslında bütün bunları bilmiyoruz, kanıtlamalıyız, ama aşağıda yapacağımız işlemlerle kanıtlayamasak da bu sonuçları sezgisel olarak görmeye çalışacağız.

$x = 1$ için $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ifadesinin değeri 2 dir.

$x = 2$ için $(1{,}5)^2 = 2{,}25$,

$x = 10$ için $(1{,}1)^{10} = 2{,}5937424601$,

$x = 100$ için $(1{,}01)^{100}$ için 2,7048138294 (yaklaşık değer),

$x = 1000$ için $(1{,}001)^{1000} = 2{,}7169239322$ (yaklaşık değer).

Yukarıdaki işlemlere baktığımızda taban 1'e yaklaşırken üssün sürekli büyüdüğünü ve sonucun ise 2 ile 3 arasında bir sayıya yaklaştığını görüyoruz. Peki, x'e daha büyük değerler verirsek sonuç ne olur? Bu sorunun yanıtını limit hesabını kullanmaksızın vermek mümkün değildir. Bu yazıda limit hesabının tekniklerini kullanmama kararında olduğumuzdan sonucu açıklayalım: Bu ifade matematiğin π'den sonraki en meşhur sayısı olan e 'ye yakınsar. e sayısı π gibi irrasyonel (hatta yine π gibi aşkın) bir sayıdır ve virgülden sonraki ilk on basamağıyla ifade edersek

e = 2,7182818284... olarak yazılır.

Şimdi artık görüyoruz ki x değerleri sürekli büyürken başlangıçta "1 üzeri sonsuz" belirsizliğinin bulunduğunu saptadığımız

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

ifadesi (değişkeni) *e* sayısına yakınsıyor. Bu sayıyı ünlü İsviçreli matematikçi Jakob Bernoulli faiz hesaplamalarıyla uğraşırken keşfetmiştir.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

ifadesindeki kesrin payındaki 1 yerine 2 yazarsak taban yine 1'e yakınsar ve üs de sonsuza ıraksar ve bu durum da " 1 üzeri sonsuz" belirsizliği (ama aslında limit durumunda belirli) vardır. Bu kez bu ifadenin sonucu limit hesabıyla e^2 bulunur, yani *x* sürekli büyüyen değerler alırken

$$\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$$

değişkeni e^2'ye yakınsar.

Öte yandan bir başka örneğe bakarsak,

$$\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x^2}$$

değişkeninde *x*'i yine sürekli olarak büyüttüğümüzde bu ifadenin bu kez "sonsuza" ıraksadığını görürüz.

Görüldüğü gibi "1 üzeri sonsuz" olarak ifade edilen durum e, e^2 gibi farklı sayılara yakınsayabildiği gibi "sonsuza" da ıraksayabiliyor. Bu yüzden bu durumun adı belirsizliktir ve soru kökünde "1 üzeri sonsuz" sözcükleriyle anlatılmak istendiği gibi bir sayı, bir matematiksel nesne değildir.

BÜTÜN TAMSAYILARIN TOPLAMI!

Bütün tamsayıların toplamı kaçtır? Pozitif tamsayılarla negatif tamsayılar sonsuza değin sadeleşerek toplanacağından bu toplamın sonucu sıfır olmaz mı?

Matematikte sonsuz toplamlar hakkında temel bilgilere sahip herkes yukarıdaki soruların yanlış olduğunu bilir ve bu sorulara yanıt aramaz; çünkü sonlu işlemlere uyguladığımız birçok yöntemi sonsuz toplamlarda kullanamayız. Matematikçilere yüzyıllarca kök söktüren sonsuz toplamların hesabı için geliştirilmiş yöntemler yukarıdaki soruları sormamıza izin vermez. Ama maalesef, yıllardır, bu sorular üniversiteye giriş sınavlarına hazırlık ve lise yardımcı ders kitaplarında soruldu, soruluyor. Bu soruları hazırlayanlar, sanki "sonsuza" seyahat ederek sonsuz sayıdaki tamsayıyı toplamayı başarıyor! Bu kitaplardan aldığım bir örnekle "sonsuza" yolculuk yapmayı ister misiniz?

$\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}<0$ eşitsizliğini sağlamayan tamsayıların toplamı kaçtır?

Basit bir hesaplamayla eşitsizliğin çözüm aralığını (–2, 1) buluruz. Bu aralığın dışındaki tamsayılar sonsuz elemanlı bir küme oluşturuyor: {..., –4, –3, –2, 1, 2, 3, 4, ...}. Buraya kadar sorun yok, ama soru, bizden bu sonsuz sayıdaki tamsayıyı toplamamızı istiyor. Peki, bu nasıl olacak? Soruyu hazırlayan şöyle düşünü-

yor: $-2+2 = 0$, $-3+3 = 0$, $-4+4 = 0$ ve bu şekilde sonsuza değin 1 dışındaki bütün tamsayıların ters işaretlileriyle toplamı 0. Bu toplamın üzerine açıkta kalan 1'i eklersek sonuç 1 olur.

Yapılan çözüm size de doğru gelmiş olabilir. Oysa sonlu toplamlarda yapılan her işlemin sonsuz toplamlara uygulanamayacağını gösteren güzel bir yanlışla karşı karşıyayız! Soruyu hazırlayan şu soruları yanıtlamak zorunda: Tüm ters işaretli tamsayıların toplamının sonsuza değin yapılabileceğini nasıl bilebiliriz? Her şeyden önce, böyle bir toplam tanımlanmış mıdır? Matematik diliyle sorarsak: Eğer böyle bir toplam varsa bu toplamı ifade eden serinin genel terimi nedir? Bu seri yakınsak mıdır? Bu soruları olumlu yanıtlamak mümkün değil; çünkü sonsuz toplamlarda öncelikle toplamı ifade eden seri tanımlanır, sonrasında sonlu bir sayıya yakınsayıp yakınsamadığı araştırılarak hesap yapılır. Yukarıda yapılan çözümde bu toplam tanımlanmadan sonlu bir sayıya yakınsadığı varsayılmış. Şimdi, biz de matematik yerine aritmetiği kullanarak bu yönteme benzer yollarla bu toplamı farklı şekillerde bulmaya çalışalım.

I. Yol: Bu sayıları aşağıdaki gibi eşleştirerek toplayalım;

$(-2+1)+(-3+2)+(-4+3)+\ldots$

$(-1)+(-1)+(-1)+\ \ldots$ olur ve bu toplam, limit durumunda $-\infty$'a ıraksar.

II. Yol: Bu kez "1" ve "2" dışındaki sayıları eşleştirelim;

$1+2+(3-2)+(4-3)+\ \ldots$

$1+2+1+1+\ \ldots = 1+1+1+1+1+\ ...$ olur ve bu toplam da limit durumunda $+\infty$'a ıraksar.

III. Yol: Bu kez "1" dışındaki sayıları aşağıdaki gibi eşleştirirsek;

$1+(2-3)+(3-2)+(4-5)+(5-4)\ \ldots$

$1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+\ \ldots$ sonsuz toplamını elde ederiz, ki bu toplam matematik tarihinde Grandi Serisi olarak bilinen, Leibniz, Euler gibi matematikçileri uğraştırmış ıraksak bir seridir. Sonlu bir sayıya eşit değildir. Bu seri üzerinde yapılacak

"hileli" oynamalarla toplam 0, 1, $\frac{1}{2}$ gibi sayılara eşit bulunsa da seri bir sayıya yakınsamaz.

Örneğin seriyi aşağıdaki gibi iki farklı şekilde gruplayarak toplarsak "sonucu" 0 ve 1 buluruz.

$(1-1)+(1-1)+(1-1)+ \ldots = 0+0+0+ \ldots = \mathbf{0}$ bulunur ya da

$1 + (-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+ \ldots = 1+0+0+0+ \ldots = 1$ olur.

Bu toplamın sonlu bir sayıya eşit olduğunu varsayalım (ki bu doğru değil).

Bu durumda:

$S = 1+(-1)+1+(-1)+1+(-1) + \ldots$ olsun.

$S = 1-[1+(-1)+1+(-1) + \ldots]$

$S = 1-S \Longrightarrow S = \frac{1}{2}$ bulunur.

Görüldüğü gibi $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4} < 0$ eşitsizliğini sağlamayan tamsayıların toplamının 0, 1 ve $\frac{1}{2}$ gibi üç farklı sayıya eşit olabileceğini ve ayrıca $\pm\infty$'a ıraksayabileceğini gösterdik. Bu toplam hesaplanamaz, soru yanlıştır! "Sonsuzu" bir sayı gibi kullanarak işlem yapmak çok bilinen bir amatör matematikçi hatasıdır. Bu soruda bu hata yapılıyor. Belki sezgilerimiz bize sayıların sonsuza değin ters işaretlileriyle toplandığında sadeleşeceğini söyler ama "sonsuz" bir büyüklük değildir, en büyük pozitif tamsayı ve en küçük negatif tamsayı olmadığı için böylesi bir sadeleşmeden söz edemeyiz.

Aslında yapılan bu kaba hatanın nedeni "$\infty-\infty$"u sıfıra eşitlemekten kaynaklanır. Bu soruları hazırlayan kişiler "sonsuz"u matematiksel bir nesneymiş gibi kabul edip "$+\infty$" ile "$-\infty$" u toplayıp sadeleştiriyorlar. –2, 2, –3, 3 birer matematiksel nesnedir, daha doğrusu bu semboller matematiksel nesnelerin adıdır. Dolayısıyla $2-2$,$3-3$ yazabiliriz, ama "sonsuz" , bir nesne veya bir ad olmadığından "$\infty-\infty$" yazamayız. Matematikte "sonsuz" sözcüğü sıfat olarak kullanılır, tıpkı "sonlu" sözcüğü gibi. Örneğin "sonlu sayıda" veya "sonsuz sayıda" dediğimizde "sonlu"

ve “sonsuz” sözcükleriyle sayıları nitelemiş oluruz. Bu sözcükler “Nasıl?” sorusuna verilen yanıtın içinde yer alırlar, günlük hayattaki “güzel”, “çirkin”, “sıcak”, “soğuk” nitelemelerinde olduğu gibi. Bu yüzden, ∞ sembolünü matematiksel nesnelerin gösterimini ifade eden semboller gibi kullanamayız; çünkü “∞” bir ismi değil sıfatı gösterir. Bir matematikçi “∞–∞” yazdığında sürekli büyüyen iki değişkenin farkını anlatmak ister ve bu farkın da belirsiz olduğunu bilir. Bu fark, sonlu bir sayıya yakınsayabileceği gibi, ±∞’a da ıraksayabilir. Bu yüzden tamsayıların toplamı ıraksak bir sonsuz toplamdır, hesaplanamaz. Tabii bizim bu açıklamalarımız bu sonsuz toplamın ıraksak olduğunun matematiksel kanıtı değildir. Doğru olan, bütün tamsayıların toplamını bir seri olarak tanımlamak ve bu serinin kısmi toplamlar dizisini yazarak ıraksak olduğunu göstermektir. Matematiksel analizin “Seriler” bölümünde karşılığı bulunan bu kanıtı yapmayı meraklı okura bırakıyorum. Ama matematikte sonsuz kavramıyla ilgili daha ayrıntılı popüler bilgilere ulaşmak isteyen okurlar Kaynaklarda belirttiğim “Matematik ve Sonsuz” başlıklı makaleden yararlanabilirler. Öte yandan orta öğretim kitaplarında yer alan sonsuz sayıdaki tamsayının toplamıyla ilgili soruları hazırlayanlara da bu makaleyi okumalarını şiddetle öneririm.

KAYNAKLAR

1) Ali Nesin, *Matematik ve Sonsuz,* Nesin Yayıncılık, 2010.
2) G. H. Hardy, *Divergent Series,* Clarendon Press, 1949.

1+2+3+4+ ··· = –1/12

Bu eşitlik matematiksel bir deli zırvası olabilir. İlk bakışta ünlü İngiliz matematikçi G.H. Hardy de böyle düşünmüştür. Kendisine gelen bir mektupta karşılaştığı bu önermenin matematiksel bir saçmalık olduğuna inanarak, sinirle mektubu masaya bırakmıştır. Ama sonrasında, daha derin bir incelemenin ardından, mektupta yazılı olan birçok formülün ve sözünü ettiğimiz bu eşitliğin arkasında dâhice bir çalışmanın olduğu sonucuna ulaşmıştır.

Hardy'ye gelen mektup Hindistan'dan S. Ramanujan imzasıyla gönderilmiştir, yıl 1913. Bu ilginç ve romantik hikâyeyi "Bir Dehanın Ayaküstü Çözdüğü Problem" başlıklı yazıda bulabilirsiniz. (s.177)

Kuşkusuz ki Ramanujan bu eşitliği, yaptığı çalışmaların sonucunda ortaya çıkan bir "çelişkiyi" anlatabilmek için yazmıştır. Kendi kendini eğitmişti, modern matematiksel kanıt kavramının ne olduğunu bilmiyordu, ama 1+2+3+4+… = –1/12 eşitliğinin serilerdeki yakınsaklık kriterlerine göre doğru olamayacağını görmemesi olanaksızdı. O, geçmişte, sonsuz toplamlarla ilgili Euler ve Leibniz'in de bilerek (!) yaptıkları bir hatayı tekrarlıyordu. Örneğin Euler, 1749'daki bir yazısında

1–2+3–4+5–6+ …

serisinin ıraksadığını kabul etmiş, ama yine de bu toplamı hesaplamaya çalışarak sonucun 1/4 olduğunu iddia etmiştir. Euler,

$$1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-6x^5+\ \ldots\ =\ \frac{1}{(1+x)^2}\quad \text{(I)}$$

eşitliğinde $x = 1$ alarak

$$1-2+3-4+5-6+\ \ldots\ =\ \frac{1}{4}$$

sonucuna ulaşmıştır. Oysa, Euler'den sonraki çalışmalarda,

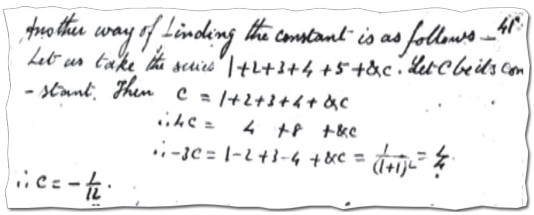
$$1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-6x^5+\ \ldots$$

serisinin $x = 1$ için anlamsız olduğu dolayısıyla (I) eşitliğinde $x = 1$ alınamayacağı gösterilmiştir.

Ramanujan,

$$1+2+3+4+5+6+\ \ldots\ =\ -\ \frac{1}{12}$$

eşitliğini yazarken Euler'in hatasını tekrarlıyor ve not defterine şu satırları yazıyordu:


another way of finding the constant is as follows — 48
Let us take the series 1+2+3+4+5+&c. Let C be its constant. Then C = 1+2+3+4+&c
∴ 4C = 4 + 8 + &c
∴ −3C = 1−2+3−4+&c = 1/(1+1)² = 1/4
∴ C = −1/12.

Burada Ramanujan,

$$1+2+3+4\ \ldots$$

toplamını c ile gösterip, $4c$'yi elde ederek,

$$-3c\ =\ 1-2+3-4+\ \ldots$$

sonucuna ulaşıyor ve Euler'in,

$$1-2+3-4+5-6+\ \ldots\ =\ \frac{1}{4}$$

eşitliğini keşfederek, $-3c = \frac{1}{4}$ yazıp, $c = -\frac{1}{12}$ sonucunu buluyor.

Elbette, bu işlemlerin tümü yanlıştır, çünkü yaklaşık 150 yıldan bu yana bir sonsuz serinin toplamı onun kısmi toplamları serisinin limiti olarak tanımlanmaktadır. Sonsuz serilere sonlu toplamlarmış gibi davranmak çok tehlikelidir, özellikle ıraksak serilere böyle yaklaşmak daha da tehlikelidir. Örneğin, her şeyden önce,

$$1+2+3+4+ \ldots$$

toplamını *c* gibi sayıya eşitlemek bu toplamın yakınsak olduğunu kabul etmek demektir ki, bundan sonra yapılacak her işlem yanlış ve tutarsız sonuçlar doğuracaktır. Böylesi yanlışların meraklısı olan okura yazının sonundaki "Eğlenceli, hileli ve matematiksiz bir kanıt!" başlıklı bölümü okumalarını öneririm.

Hemen belirtelim. Ramanujan yaptığı bu yanlışların tümünün farkındaydı ve Hardy'nin mektubuna verdiği yanıtta –1/12 sonucuna not defterindeki işlemleri kullanarak değil, Riemann zeta fonksiyonuyla ulaştığını belirtmiştir.

$$\varsigma(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots$$

Batı matematiğinin birçok alanından habersiz olan Ramanujan yukarıda en yaygın gösterimiyle ifade ettiğimiz Riemann zeta fonksiyonunu kendi kendine keşfediyordu. Riemann'ın 50 yıl önceki çalışmaları hakkında hiçbir bilgisi yoktu. Bu fonksiyonda s = –1 alıp, Riemann zeta fonksiyonunun bazı özel değerlerini kullanarak,

$$1+2+3+4+ \ldots = -\frac{1}{12}$$

eşitliğine ulaşıyordu. Bulduğu sonuç Riemann zeta fonksiyonu altında doğruydu, çünkü Riemann, bu fonksiyonunun *s* = 1 dışında tüm karmaşık düzleme analitik olarak genişletilebileceğini göstermişti. Bu konu popüler bir yazının sınırlarını aştığından bu işlemlere yer vermiyoruz. (Kaynak 1)

Matematikle içgüdüsel bir bağı olan Ramanujan, ıraksak bir serinin –1/12'ye eşitlenmesindeki çelişkinin farkında olduğunu

belirterek Hardy'ye şu satırları yazıyordu: "(...) Benim teorime göre

$$1+2+3+4+\ \ldots\ = -\frac{1}{12}$$

eşitliğinin doğru olduğunu size söylersem, bana doğrudan akıl hastanesinin yolunu gösterirsiniz. Bunun üzerinde durmamın sebebi yaptığım çalışmalar konusunda sizi ikna edebilmek."

Günümüzde, Ramanujan toplamı olarak adlandırılan

$$\varsigma(-1) = -\frac{1}{12}$$

eşitliğinin fizikte sicim teorisinde uygulamalarının olduğunu biliyoruz.

Hardy, diğer İngiliz matematikçilerinin yaklaşımının tersine, Ramanujan'ın çalışmalarında salt sonuçlara bakmamış, onun Riemann zeta fonksiyonu gibi varlığından bile haberinin olmadığı birçok alanda kendi kendine yaptığı keşifleri fark edebilmiştir. Hardy, Ramanujan'ın çalışmalarının arkasındaki dehayı yeryüzüne çıkarmakla, kendisinin de dâhiyane bir matematiksel içgörüye sahip olduğunu göstermiştir.

Hileli, eğlenceli ve matematiksiz bir kanıt!

Hokus pokus yaparak da,

$$c = 1+2+3+4+\ \ldots\ = -\frac{1}{12}$$

eşitliğinin doğruluğunu kanıtlayabiliriz! Hocalara saç baş yolduracak, tebeşir fırlattıracak bu kanıttaki hatalardan daha önce söz etmiştik.

$$a = 1-1+1-1+1-1+\ldots$$

eşitliğinin her iki yanını –1'le çarpıp, 1 eklersek,

$$1-a = 1-1+1-1+1-1+\ldots$$

olur ki, buradan $1-a = a$ ve $a = \frac{1}{2}$ bulunur.

Şimdi de,

$$b = 1-2+3-4+5-6+ \ldots$$

eşitliğine bakalım. Bu eşitliği aşağıdaki gibi ikinci satırdaki terimleri bir sağa kaydırarak alt alta iki kez yazıp taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{aligned} b &= 1-2+3-4+5-6+ \ldots \\ b &= \quad 1-2+3-4+5-6+ \ldots \\ 2b &= 1-1+1-1+1-1+ \ldots \end{aligned}$$

elde edilir ki $2b = a = \frac{1}{2}$ eşitliğinde $b = \frac{1}{4}$ olur.

$$c = 1+2+3+4 \ldots$$

ifadesindeki terimlerden,

$$b = 1-2+3-4+5-6+ \ldots$$

ifadesindeki terimleri tek tek(!) taraf tarafa çıkaralım.

$$\begin{aligned} c-b &= 4+8+12+16+ \ldots \\ c-b &= 4(1+2+3+4+\ldots) \end{aligned}$$

elde edilir ki buradan da c–b = 4c olur. $c = -\frac{b}{3}$'tür ve $b = \frac{1}{4}$ bulmuştuk.

O halde,

$$c = 1+2+3+4+ \ldots = -\frac{1}{12}\text{'dir!}$$

Teşekkür: *Başlıktaki eşitlikle tanışmamı sağlayan ve bu konuda yazmamı öneren, bilgi veren Yılmaz Akyıldız'a çok teşekkür ederim.*

KAYNAKLAR

1) plus.maths.org/content/disappearing-number
2) İ. Yusubov, *Anlamanın Sevinci ve Kederi*, Bilim ve Gelecek Kitaplığı, 2008.
3) http://en.wikipedia.org/wiki/1+2+3+4+...

YANLIŞIMI BUL!

Bir şarkı sözüdür: "Ben nerde yanlış yaptım?" Hayatın içinde kendimizi sorgularken sorduğumuz bu soruyu, matematikte problem çözerken, teorem kanıtlarken sık sık sorarız. Daha doğrusu sormak zorunda kalırız; çünkü ister ilkokul düzeyinde ister akademik düzeyde matematikle uğraşan hemen herkes farklı nedenlerle hata yapar. Bu hataların önemli bir bölümü, adına "işlem hatası" dediğimiz dört işlemle ilgilidir. Bazı hatalarsa matematiksel bilgi eksikliğine bağlı yanılmalardan kaynaklanır.

Bu yazıda matematiğin ihlali sonucu ortaya çıkan bazı yanlışlardan örnekler vereceğiz. Ne de olsa hata yapmak öğrenmenin parçasıdır. Aşağıdaki eşitliklerde hangi satırda yanlış yapıldığını bulabilir misiniz? Matematiğin değişik konularına ait bu basit hataları görebilmek için ortaöğretim düzeyinde matematik bilgisi gerekiyor.

1)
$$\frac{x+2}{m+n+2}=\frac{x-2}{m+n-2}$$
$$\frac{x+2}{m+n+2}-1=\frac{x-2}{m+n-2}-1$$
$$\frac{x+2-m-n-2}{m+n+2}=\frac{x-2-m-n+2}{m+n-2}$$

$$\frac{x-(m+n)}{m+n+2}=\frac{x-(m+n)}{m+n-2}$$
$$\frac{1}{m+n+2}=\frac{1}{m+n-2}$$
$$m+n+2=m+n-2$$
$$2=-2$$

Yanlışımı bul!

2) $2x^2-1=0$
$10x^2=5$
$4x^2+4=9-6x^2$
$x^4+4x^2+4=x^4-6x^2+9$
$(x^2+2)^2=(x^2-3)^2$
$x^2+2=x^2-3$
$2=-3$

Yanlışımı bul!

3) $\text{Cos}^2x=1-\text{Sin}^2x$
$\text{Cos}^6x=1-3\text{Sin}^2x+3\text{Sin}^4x-\text{Sin}^6x$
$\text{Cos}^3x=\sqrt{1-3\text{Sin}^2x+3\text{Sin}^4x-\text{Sin}^6x}$
$x=\pi$ için $-1=1$

Yanlışımı bul!

4) $\log\frac{1}{2}=\log\frac{1}{2}$
$3\log\frac{1}{2}>2\log\frac{1}{2}$
$\log\left(\frac{1}{2}\right)^3>\log\left(\frac{1}{2}\right)^2$
$\left(\frac{1}{2}\right)^3>\left(\frac{1}{2}\right)^2\Rightarrow\frac{1}{8}>\frac{1}{2}$

Yanlışımı bul!

5) $\dfrac{1}{\log_6(x+3)} - \dfrac{\log_2(4-x)}{\log_2(3+x)} = 1$

denkleminin çözüm kümesini aşağıdaki gibi bulalım.

$$\frac{\log_2 6 - \log_2(4-x)}{\log_2(3+x)} = 1$$

$$\log_2 6 - \log_2(4-x) = \log_2(3+x)$$

$\dfrac{6}{4-x} = x+3$ denkleminden $x = 3$ ve $x = -2$ bulunur.

Oysa $x = -2$ başlangıçtaki denklemin kökü değildir.

Yanlışımı bul!

6) $x^{\log_{\sqrt{x}} 2x} = 4$ denkleminin çözüm kümesini aşağıdaki gibi bulalım.

$$x^{\log_{\sqrt{x}} 2x} = 4$$

$$x^{\log_x (2x)^2} = 4$$

$(2x)^2 = 4 \Rightarrow x = 1$ ve $x = -1$ bulunur.

Oysa ne 1 ne de –1 başlangıçtaki denklemin kökü değildir.

Yanlışımı bul!

7) $\mathrm{Sin}x + \mathrm{Cos}x = 1$ denkleminin $[0, 2\pi]$ aralığındaki özel çözüm kümesini aşağıdaki gibi bulalım.

$\mathrm{Sin}x + \mathrm{Cos}x = 1$

$\mathrm{Sin}^2x + 2\mathrm{Sin}x\mathrm{Cos}x + \mathrm{Cos}^2x = 1$

$\mathrm{Sin}2x = 0$

$$Ç = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}!$$

Oysa $x = \pi$, $x = \dfrac{3\pi}{2}$ başlangıçtaki denklemin kökleri değildir.

Yanlışımı bul!

8) $\tan 5x = \tan 7x$ denkleminin $[0, 2\pi]$ aralığındaki özel çözüm kümesini aşağıdaki gibi bulalım.

$$\frac{\text{Sin}5x}{\text{Cos}5x} = \frac{\text{Sin}7x}{\text{Cos}7x}$$

$$\frac{\text{Sin}5x.\text{Cos}7x - \text{Cos}5x.\text{Sin}7x}{\text{Cos}5x.\text{Cos}7x} = 0$$

$$\text{Sin}2x = 0$$

$$Ç = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}!$$

Oysa $x = \frac{\pi}{2}$ ve $x = \frac{3\pi}{2}$ başlangıçtaki denklemin kökleri değildir.

Yanlışımı bul!

9) $\text{Cos}180 + i\text{Sin}180 = -1$

$$[\text{Cos}60 + i\text{Sin}60]^3 = (-1)^3$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = -1$$

$$\sqrt{3}i = -3$$

$$i = -\sqrt{3}$$

Yanlışımı bul!

10) $x = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots$. ve $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots$. olsun.

$$2y = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots.$$

$$x + y = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots.$$

$$2y = x + y \Rightarrow x - y = 0$$

Başlangıçtaki ifadeleri taraf tarafa çıkaralım.

$$x - y = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots.$$

$$0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \ldots. > 0$$

$0 > 0$ Yanlışımı bul!

11) $\underbrace{x+x+x+\ldots\ldots+x}_{x \text{ tane}} = x^2$

Eşitlikte her iki yanın türevini alalım.

$\underbrace{1+1+1+\ldots\ldots+1}_{x \text{ tane}} = 2x$

$x = 2x$

$1 = 2$ Yanlışımı bul!

12) $\int \text{Sin}x.\text{Cos}x.dx = \int \text{Cos}x.\text{Sin}x.dx$

Bu integrali iki farklı şekilde yazalım.

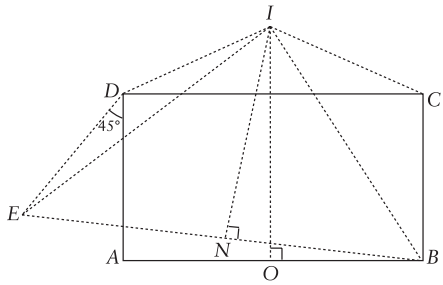
$$\frac{\text{Sin}^2 x}{2} = -\frac{\text{Cos}^2 x}{2}$$

$$\tan^2 x = -1$$

$$\tan x = \mp i$$

Yanlışımı bul!

13) Bir dik açının ölçüsü bir geniş açının ölçüsüne eşittir ve 2 = 3 tür!



ABCD dikdörtgeninde $m(\widehat{EDA}) = 45°$ ve $|DE| = |DA|$ olacak şekilde DE doğru parçasını çizelim. AB ve EB doğru parçalarının orta dikmeklerinin kesim noktası I olsun. Bu noktayı E, B, C, D noktalarıyla birleştirelim.

$OI \perp AB \Leftrightarrow OI \perp DC$ ve OI doğrusu, AB'nin orta dikmesi olduğundan DC'nin de orta dikmesidir. O halde $|IC| = |ID|$, $|IB| = |IE|$, $|BC| = |DE|$ eşitlikleri yazılabilir.

Buradan $\overset{\triangle}{IBC} \cong \overset{\triangle}{IED}$ (K.K.K)

Bu üçgenlerde;

$|IB| = |IE| \Leftrightarrow m(B\hat{C}I) = m(E\hat{D}I)$ bulunur.

$m(B\hat{C}I) = 90^\circ + m(D\hat{C}I)$

$m(E\hat{D}I) = 90^\circ + 45^\circ + m(C\hat{D}I)$

$90^\circ + m(D\hat{C}I) = 135^\circ + m(C\hat{D}I)$

IDC ikizkenar üçgen olduğundan $m(D\hat{C}I) = m(C\hat{D}I)$dir.

O halde $90° = 135° \Rightarrow 2 = 3$

Yanlışımı bul!

Çözümlerdeki yanlışları kitabın sonundaki "Yanıtlar" bölümünde bulacaksınız.

SEZGİLERİNİZE GÜVENEBİLİR MİSİNİZ?

Bir teoremi kanıtlarken, bir problemi çözerken zaman zaman sezgilerimizle yol alırız. Salt mantık bizi hiçbir zaman yeni şeylere götürmez. Çoğu zaman sezgi, mantığı tamamlama rolünü üstlenir. Sezgilerimizle tahminde bulunur, bir sonraki aşamada nereye bakacağımızı kestirmeye çalışırız. Ancak her zaman doğru sonuçlara ulaşamayız. Salt sezgilerimizle uzağı görmek istersek gerçekler bulanıklaşır, yanılabiliriz.

Matematik yapanlar çok iyi bilir, zaman zaman sezgilerinin kendilerini aldattığını, sağlam bir matematiksel düşünme ve donanıma sahip olmak gerektiğini... Bu durum birçok popüler matematik problemini çözmeye çalışırken de karşımıza çıkar. Bu yazıda, ilk karşılaştığımda sezgilerimin oyununa geldiğim bazı popüler matematik problemlerini sizinle paylaşmak istiyorum. Siz de sezgilerinizi sınamak ister misiniz?

Soru 1. On üç kişi yuvarlak bir masanın etrafındaki 13 sandalyeye oturuyorlar, sonra kalkıp değişik bir biçimde tekrar oturuyorlar. Her defasında değişik bir biçimde oturarak olası bütün seçenekleri deniyorlar. Her defasında herkesin yerine oturabilmesi için bir dakika zaman geçtiğini kabul edersek, masanın etrafında bütün değişik şekillerde oturulması ne kadar zaman alır?

Tahmini bir süre söyleyebilir misiniz?

Soru 2. Elimizde üç kart var. Birinin iki yüzü de siyah, birinin iki yüzü de kırmızı ve diğerinin bir yüzü siyah, öteki yüzüyse kırmızıdır. Kartları bir şapkanın içine atıyoruz ve bir kart çekiyoruz. Çektiğimiz bu kartın sadece bir yüzüne bakarak, bu yüzün kırmızı olduğunu görüyoruz. Bu kartın diğer yüzünün de kırmızı renkte olma olasılığı kaçtır?

Soru 3. Bu soruyu sormadan önce çok bilinen bir sonsuz terim toplamından söz edelim:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots=1.$$

Yukarıdaki toplamda her terim bir önceki terimin $\frac{1}{2}$ katı alınarak elde edilmiştir. Bu toplamın 1'e eşit olduğunu ileride "Olasılık Sohbetleri" başlıklı yazımızda kanıtlayacağız. Şimdi bu toplamla ilgili sorumuzu sorabiliriz: Çok hızlı çalışan bir **süperasansör**e bindiğimizi düşünelim. Süperasansör $\frac{1}{2}$ dakikada zemin kattan üçüncü kata çıkıyor ve $\frac{1}{2^2}$ dakikada üçüncü kattan zemine iniyor. Daha sonra tekrar zeminden üçüncü kata bu kez $\frac{1}{2^3}$ dakikada çıkıyor ve zemin kata $\frac{1}{2^4}$ dakikada iniyor. Bu şekilde sonsuz kez üçüncü kata çıkıp inen bir süperasansöre binersek 1 dakikanın sonunda zemin katta mı üçüncü katta mı oluruz?

Soru 4. "Her zamankinden mi istersiniz?" sorusuna "Evet, her zamankinden" yanıtını alan barmen, dolaptan iki şişe çıkarır. Birinin içinde 1 litre vermut, diğerindeyse yarım litre cin vardır. Cinin bulunduğu şişeye yarım kadeh vermut koyar ve şişeyi güzelce çalkalar. Daha sonra bu şişeden yine yarım kadeh karışımı vermutun bulunduğu şişeye doldurur. Haliyle başlangıçtaki gibi vermutun bulunduğu şişe yine 1 litre, diğer şişe ise yine yarım litre karışımla doludur. Barmenin yaptığı bu işlemlerin sonunda vermut şişesindeki cin, cin şişesindeki vermuttan daha mı fazladır? Yoksa daha mı az? Yoksa eşit midirler?

Soru 5. Bir grupta doğum günleri aynı olan en az iki kişinin buluma olasılığının yüzde 50 olması için bu grupta en az kaç kişi olması gerekir? Hesaplama yapmadan önce tahmini bir sayı söyleyebilir misiniz?

Soru 6. Aşağıdaki sonsuz toplam, müzikten esinlenerek isimlendirilmiş olan Harmonik bir seridir.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$$

Bu toplamdaki kesirlerin paydalarındaki tamsayılar ardışık olarak artar. Bu toplamın sonsuza ıraksadığı 400 yıldan fazla bir süredir bilinmektedir. Bu toplamı ilginç kılan yan, $1/n$ sayılarının sıfıra çok yavaş yakınsamalarına rağmen,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}\ \ldots$$

serisinin (sonsuza) çok yavaş ıraksamasıdır.

Sorumuz şöyle: Saniyede bir milyon işlem yapan bir bilgisayarımız olduğunu varsayalım. Bu bilgisayarla bu serinin terimlerini soldan başlayıp birbirlerine ekleyerek topladığımızı düşünelim. Bu toplam 191'e ulaşıncaya dek bilgisayarın aralıksız çalışması ne kadar zaman alır?

Soru 7. Bir basamaklı doğal sayılar (rakamlar) arasından üç tanesiyle yazılabilecek en büyük sayı

$$9^{9^9}$$

sayısıdır. Bu sayıyı basamaklarına göre bilgisayarda (12 puntoluk ölçüyle) yazdığımızda elde edilen sayının uzunluğunun kaç metre olacağını tahmin edebilir misiniz?

Soru 8. İki arkadaş İzmir'den saat 6.00'da hareket ederek 6 saatte Bursa'ya varıyorlar. Ertesi gün yine saat 6.00'da Bursa'dan İzmir'e hareket ederek 4 saat sonra İzmir'de oluyorlar. Aracın sürücüsü dönüş yolunda arkadaşına "Dün tam bu saatte buradaydık." dediği anda saat kaçtı? Hesaplamadan önce saatin kaç olacağını tahmin edebilir misiniz?

Soru 9. Soru 8'de sözünü ettiğimiz iki arkadaş İzmir Bursa arasında sık sık seyahat ederler. Bir gün İzmir'den Bursa'ya saatte 60 km hızla gidiyorlar ve aldıkları bir haber üzerine acilen İzmir'e dönmeleri gerekiyor. Sürücü, gidiş dönüş ortalama hızlarının saatte 120 km olabilmesi için saatte kaç km hızla dönmeleri gerektiğini hesaplamaya başlıyor. Bu hesabın sonucunu bulabilir misiniz?

Soru 10. Bir televizyon yarışma programında yarışmacıdan üç kapıdan birisini seçmesi istenir. Kapılardan ikisinin arkası boştur, diğer kapının arkasında ise bir otomobil vardır. Yarışmacı bir kapıyı seçtikten sonra yarışmanın sunucusu diğer iki kapıdan birini açıp arkasının boş olduğunu gösteriyor ve yarışmacıya açılmamış diğer kapının mı yoksa önceden seçtiği kapının mı açılmasını istediğini soruyor. Yarışmacı otomobili kazanma olasılığını artırmak için seçimini değiştirmeli midir?

Soru 11. Sonsuz sayıdaki bilyeyle oynamayı çok seven A ve B gibi iki kişinin sadece 1 dk sürecek olan bir oyunu oynadıklarını hayal edelim. A'nın elinde 1, 2, 3, 4… olarak numaralandırılmış sonsuz sayıda bilye var; B'de ise hiç bilye yok. Oyun saat 12'ye 1 dk kala başlıyor.

A, (birinci adımda) saat 12'ye 1 dk kala, 1'den 10'a kadar numaralandırılmış on bilyeyi B'ye veriyor; B, 1 numaralı bilyeyi A'ya geri gönderip, diğer dokuz bilyeyi elinde tutuyor.

A, (ikinci adımda) saat 12'ye 30 sn kala, 11'den 20'ye kadar numaralandırılmış on bilyeyi B'ye veriyor; B, 2 numaralı bilyeyi A'ya geri gönderip, diğer bilyeleri elinde tutuyor.

A, (üçüncü adımda) saat 12'ye 15 sn kala, 21'den 30'a kadar numaralandırılmış on bilyeyi B'ye veriyor; B, 3 numaralı bilyeyi A'ya geri gönderip, diğer bilyeleri elinde tutuyor.

A, (dördüncü adımda) saat 12'ye 7,5 sn kala, 31'den 40'a kadar numaralandırılmış bilyeleri B'ye veriyor; B, 4 numaralı bilyeyi A'ya geri gönderip diğer bilyeleri elinde tutuyor.

Bu oyunun, her adım sonrasında sürenin yarıya düşmesiyle saat 12'ye kadar sonsuz adımda oynandığı varsayılırsa saat tam 12'de A'nın ve B'nin elindeki bilye sayısı hakkında ne söyleye-

bilirsiniz? Her ikisinde de sonsuz sayıda mı bilye vardır? Yoksa tüm bilyeler herhangi birinde mi toplanır?

Soru 12. İki arkadaş bir pastanenin önünde buluşmaya karar verirler. Her ikisi de saat 17'yle 18 arasında herhangi bir anda pastanenin önüne gelecekler, on dakika bekleyip gideceklerdir. Sadece bu on dakika süresince karşılaşabileceklerdir. İki arkadaşın buluşma olasılığının yüzde kaç olduğunu tahmin edebilir misiniz?

Soruların yanıtlarını kitabın sonundaki "Yanıtlar" bölümünde bulabilirsiniz. Ayrıca, ayrıntılı çözümler için "Olasılık Sohbetleri" (Soru 2), "Problem Çözmek Güzeldir" (Soru 4), "Doğru Çözüme 'Doğru' Diyememek" (Soru 11) başlıklı bölümlere bakabilirsiniz.

KAYNAKLAR

1) Peter Casazza, *Mathematics and Intuition, www.math.missouri.edu/~pete/pdf.*
2) Ali Nesin, *Matematik ve Sonsuz*, Nesin Yayınları, 2012.

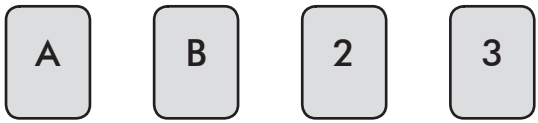
MANTIKLI DÜŞÜNEBİLİYOR MUSUNUZ?

Oldukça belirsiz, hatta komik sayılabilecek bu soruya verilecek esprili yanıt çoğu kişi için "Ne demek istiyorsunuz, tabii ki mantıklı düşünüyorum"olabilir.

İngiliz psikolog P. C. Wason "Tabii ki mantıklı düşünüyorum." sözünden "kuşku duymuş" olmalı ki sonuçları oldukça şaşırtıcı ve üzücü olan basit bir test hazırlamış. Genel başarı oranı yüzde 3 ile yüzde 5 arasında değişen, uygulayanların çoğunda hayal kırıklığı yaratan bu testte Wason, deneklerin önüne aşağıdaki gibi dört kart koyuyor. Her kartın bir yüzüne bir harf diğer yüzüne ise bir sayı yazılmış. Şu önermenin doğru olup olmadığını belirlememiz isteniyor:

Eğer kartın bir yüzünde sesli harf varsa diğer yüzünde çift bir sayı vardır.

Bu önerme hangi kartlar için doğru ya da yanlış olabilir? Bunu anlayabilmek için hangi kartı veya kartları çevirmeliyiz?



Testi bilmeyen ve uygulamak isteyecek okurların da olabileceğini düşünerek doğru yanıtı hemen yazmıyorum. Sadece,şu an düşünmekte olan okurlara yukarıdaki kuralda özellikle "varsa" sözcüğüne dikkat etmelerini öneriyorum.

Wason testi, 1966'dan bu yana birçok denek grubu üzerinde uygulanmış, ama maalesef yukarıda da belirttiğimiz gibi başarı oranı oldukça düşük: Üniversite mezunu kişiler arasında yüzde 10'u bile bulmuyor. En başarılı olanlar temel bilimlerde eğitim alanlar. İkinci sıradaysa mühendislik öğrencileri yer alıyor. (2)

Deneklerin çoğunluğu "A" ve "2" kartlarının diğer yüzüne bakılması gerektiği sonucuna varırken, ikinci sırada en çok verilen yanlış yanıt ise, sadece "A" kartı çevrilmeli seçimi olmuş.

Doğru yanıt: "A" ve "3" kartları olmalıydı. Aslında doğru yanıta ulaşmak için lisede de okutulan ve matematikte önermeler mantığında yer alan "ise" bağlacını bilmek yeterli, ama biz önce her bir kartı tek tek inceleyerek testin bizden istediği akıl yürütmeyle sonuca ulaşmaya çalışalım.

Verilen önermedeki cümlenin ilk yarısı çok önemli: **Eğer kartın bir yüzünde sesli harf varsa**… Bu bölümü atladığımızda doğru sonuca ulaşmamız imkânsız; çünkü önermedeki kural bize, kartların bir yüzünde sesli harf olması koşuluyla hareket etmemizi istiyor, yani önce sesli harfin olup olmadığını belirlemeliyiz. Bu yüzden "A" kartının arka yüzüne bakmalıyız, çünkü arkasında çift sayı olabilir ki bu durumda önerme doğrudur, aksi halde yanlıştır.

"**2" kartı:** Deneklerin en çok takıldığı bu kartı çevirmemize gerek yok! Herhalde çoğu kişi (soruyu tam anlamadan yanıtlayan bu satırların yazarı da dahil) bu kartın bir yüzünde çift sayı olduğu için diğer yüzüne de bakılması gerektiğini düşünüyor. Oysa ki kural bize,"**Eğer kartın bir yüzünde sesli harf varsa** diğer yüzünde çift bir sayı vardır"diyor, yani ancak kartın bir yüzünde sesli harf varsa bir başka gerçekten söz edebiliriz. "2" kartının diğer yüzünde sesli bir harf olsa dahi, verilen önermenin doğru olduğunu söyleyemeyiz, çünkü bu durumda,"Eğer kartın bir yüzünde çift sayı varsa diğer yüzünde sesli harf vardır" önermesi doğrulanmış olur ki, bu önerme bize verilen

önermenin karşıtıdır. Bu yüzden bu kartı çevirmemiz gerekmiyor.

"3" kartı: Belki de en çok kafa karıştıran bu kartı da kontrol etmemiz gerekiyor, çünkü eğer, diğer yüzünde sesli bir harf varsa kural ihlal edilmiş demektir, yani bu kart için önermenin yanlış olduğunu söyleriz. Burada dikkat edilmesi gereken nokta, bu kartı çevirmekteki amacımızın verilen önermeyi doğrulamak değil, yanlış olup olmadığını anlamak. "2" kartıyla "3" kartı bu bakımdan çok farklı. "2" kartının diğer yüzünde sesli veya sessiz harf olması, bize verilen "Eğer kartın bir yüzünde sesli harf varsa" koşulu yüzünden önemsizleşiyor, ama "3" kartının diğer yüzünde sesli harf olması halinde önermemizin yanlış olduğu sonucuna ulaşıyoruz.

Herhalde, hiç düşünmeden "çevirmeye gerek yok" diyeceğimiz kart "B"dir, çünkü önermenin sesli harf koşuluna daha baştan uymuyor.

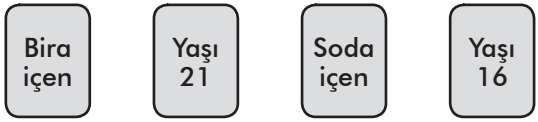
Sonuç olarak, verilen önermenin doğruluğunu kontrol etmemiz için görünen yüzünde harf olan kartlardan sesli harf olanları ve çift sayı olmayanları çevirmeliyiz.

Somut olan çok daha kolay

Soyut bir problemi anlamak, çözüm için hangi bilgilerin gerektiğine karar vererek doğru sonuca ulaşmak kolay olmuyor. Wason testinin "üzücü" sonuçları üzerine çalışan psikologlar farklı testler hazırlayarak verilen önermeyi günlük hayatın içinden bir soruya dönüştürdüklerinde başarı oranının en eğitimsiz deneklerde bile yüzde 90'lara ulaştığını gözlemlemişler. Bu çalışmalardan biri de 1966'da uygulanan ilk Wason testinden on altı yıl sonra 1982'de Richard A. Griggs ve James R. Coxtarafından oluşturulan testtir. Bu testin başarı oranı yüzde 100'e ulaşıyor.

Aşağıdaki kartların bir yüzünde kişilerin ne içtikleri, diğer yüzünde ise yaşları yazıyor. Bu kartların hangilerinde aşağıdaki önerme doğru ya da yanlış olabilir? Bunu belirleyebilmek için hangi kart veya kartları çevirmeliyiz?

Eğer kişilerden biri bira içiyorsa 18 yaşından büyük olmalıdır.



Önceki sorudan tek farkı günlük hayata uyarlanarak somutlaştırılması olan bu soruyu yanıtlamak çok kolay: Sadece "bira" ve "16 yaş" kartlarının diğer yüzlerine bakmalıyız."Eğer kartın bir yüzünde sesli harf varsa diğer yüzünde çift bir sayı vardır." önermesindeki kartları dikkate alırsak; "A", "B","2" ve "3" kartları sırasıyla buradaki,"bira", "21 yaş", "soda" ve "16 yaş" kartlarına karşılık geliyor. Nasıl ki "21 yaş" ve "soda" kartlarını çevirmemizin gereksizliği açıkça görülüyorsa, diğer önermede de "B" ve "2" kartlarını çevirmemiz gereksiz, ama soyutlayarak akıl yürütmede zorlanıyoruz. Beynimiz pratik hayatla ilişkili olaylarda daha iyi çalışıyor. Günlük hayattaki problem çözme yetilerimiz soyut mantıkta yetersiz kalabiliyor. Elbette, böylesi bir çıkarım olayın sadece bir boyutu; eğitim, sosyal ve kültürel koşullar gibi daha birçok faktörün dikkate alındığı Wason testinin benzeri araştırmalar oldukça ilginç sonuçlara sahip.

"İse" bağlacı ve Wason testi

Önermeler mantığında yer alan "ise" bağlacıyla Wason testinde doğru sonuca ulaşmak çok kolay. Aslında yukarıda kullandığımız mantık, "ise" bağlacının bir sonucu. Wason testindeki önermeyi "ise" bağlacıyla ifade edeceğiz, ama önce kısaca bu bağlaçtan söz edelim.

"İse" bağlacının kullanıldığı önermelere **koşullu önerme** adını verelim. "İse" sözcüğünü de "$\rightarrow$"olarak simgeleyelim.

$$p \rightarrow q$$

koşullu önermesinde p koşulun belirtildiği **ön bileşen**, q koşula bağlı olarak ifade edilen **ard bileşen**dir. Bir koşullu önermenin doğru olması için eğer ön bileşen doğruysa ard bileşenin de doğru olması gerekir. Ama ön bileşen yanlışsa ard bileşen doğru da olsa şartlı önerme doğrudur. Söylediklerimizi tabloda gösterelim.

p	q	$p \rightarrow q$
yanlış	yanlış	doğru
yanlış	doğru	doğru
doğru	yanlış	yanlış
doğru	doğru	doğru

Bu doğruluk tablosundaki bazı sonuçlar sezgilerimizle çelişiyormuş gibi gelebilir. Tablodaki her bir satırı basit örneklerle açıklayalım. Daha ayrıntılı bilgi için Kaynak 3'ü öneririm.

Tablonun ilk satırı, "yanlış ise yanlış" önermesinin doğruluk değerinin "doğru" olduğunu söylüyor, yani yanlış bir önermeden yanlış bir önermenin çıkarılacağını ifade ediyor. Örneğin $2 < 1$ yanlış önermesindeki eşitsizliğin her iki tarafına 1 eklersek, $3 < 2$ yanlış önermesini elde ederiz ki, bu da bize tablonun ilk satırının son sütununa "doğru" yazılabileceğini gösterir.

İkinci satır, yanlış bir önermeden doğru bir önerme çıkarılabileceğini ifade ediliyor. Örneğin $2 = 1$ yanlış önermesinden hareketle doğru bir önermeye ulaşabilir miyiz? Bu konuda Bertrand Russell'ın hoş bir anekdotu vardır:

Russell'a yanlış bir önermeden doğru bir önermenin nasıl çıkarılacağı şöyle bir soruyla sorulur: Eğer $1 = 2$ ise Papa olduğunuzu kanıtlayabilir misiniz? Russell, "Bundan kolay ne var." karşılığını vererek sözlerini şöyle sürdürür: Papa'yla beni boş bir odaya koyarsanız odada kaç kişi olur? Soruyu soran, "İki kişi elbette!" diye yanıtlar. Russell: Ama iki bire eşit. O halde odada bir kişi var. Papa'yla ben, çünkü ben Papa'yım!

Bu anekdot, sadece günlük hayatın içinden düşünerek soyut mantığın kurallarının açıklanamayacağının güzel bir örneği.

Tabloda üçüncü satır, doğru bir önermeden yanlış bir önerme çıkarmanın yanlış olduğunu söylüyor. Örneğin $2 < 3$ doğru önermesinden $2 < 1$ yanlış önermesini çıkarmanın yanlış olması gibi.

Herhalde en açık bölüm dördüncü satırdaki ifade; çünkü doğru bir önermeden doğru bir önerme çıkarmanın doğru olduğu ifade ediliyor. Örneklemeye gerek yok sanırım.

Şimdi, tekrar Wason testine dönelim ve "Eğer kartın bir yüzünde sesli harf varsa diğer yüzünde çift bir sayı vardır."

önermesini p ve q simgelerini kullanarak iki ayrı önermeye ayıralım: p, "kartın bir yüzünde sesli harf var" önermesini; q, "kartın diğer yüzünde çift sayı var" önermesini simgelesin. "Varsa" sözcüğünde yer alan "ise" ekini de "$\rightarrow$" olarak simgeleyelim. O zaman önermemiz

$$p \rightarrow q$$

olarak yazılır.

Doğruluk tablosuna bakarsak, p'nin yanlış olduğu durumlarda $p \rightarrow q$ önermesi doğru ve ayrıca q'nun doğru olduğu durumlarda da $p \rightarrow q$ yine doğru. O halde Wason testinde verilen önermenin doğruluğunu kontrol etmemiz için p'nin doğru, q'nun yanlış olduğu durumlara bakmak gerekir, yani kartların görünen yüzünde sesli harf olanları ve çift olmayanları çevirmemiz gerekir. Bu yüzden doğru yanıt: "A"ve "3".

KAYNAKLAR

1)http://fitelson.org/confirmation/notes_13.pdf.

2) Duran S, *Gereklilik Ağıdı*- I, Matematik Dünyası, 2014-I.

3) Nesin, A, *Önermeler Mantığı*, Nesin Yayınları, 2009.

MATEMATİKSEL SEMBOLLER

1995'te Cahit Arf'ın 85. doğum yıldönümü onuruna düzenlenen bir sempozyuma katılmıştım. Toplantı salonunun lobisinde matematikçilerle söyleşen Cahit Arf'ın şu sözlerini anımsıyorum: "Yaşar Kemal'in *İnce Memed*'i çok güzel; eğer edebi bir metin değil de, matematiksel bir metin olarak yazılabilseydi, ben onu matematik diliyle iki sayfada yazmak isterdim." Bu fantastik espri matematik dilinin ekonomik niteliğine vurgu yapıyordu. Ama o gün, o ayaküstü sohbette bu esprinin gerçekleşmesi kurgusu üzerine de konuşulmuştu. Hiçbir çeviriye gerek kalmadan her ülkede, matematiği bilen herkesin *İnce Memed*'i okuyabileceği şakası yapılmıştı. Kuşkusuz bu şaka matematik dilinin evrenselliğinden kaynaklanıyordu.

Matematiğin dili dünyanın ortak dilidir. Bir logaritmik denklemin çözümünü, bir eğrinin çizimini yapan her kişi dünyanın neresinde olursa olsun aynı matematiksel sembolleri kullanacaktır. Matematiğin 5000 yıllık yazılı tarihinde zenginleşerek birçok değişikliğe uğrayan bu semboller matematiksel anlatımın yapıtaşlarıdır.

Günümüz matematik notasyonu 500 yıllık bir geçmişe sahiptir ve önemli bir bölümü son 250 yıl içinde ortaya çıkmıştır. Ama matematiksel sembollerin kullanımı 5000 yıldan da öncesine dayanır. Babillerin ve muhtemelen onlardan önce Sümerlerin

sayılarla ilgili bazı sembolleri kullandıklarını biliyoruz. Çoğunlukla sayıları 60 tabanında yazmışlar. Kullandıkları bu sayı tabanının etkisini günümüzde de görmek mümkün. Dakika, saat, yıl gibi zaman ölçü birimlerini, çemberin çevresinin 360 dereceye bölünmesini 60'ın katı sayılarla ifade ediyoruz. Bugün de binlerce yıl önce sembolize edilmiş bu sayılarla birlikte yaşıyoruz.

Babillerden çok önce de sayıların gösterimi için bazı semboller kullanılmıştır mutlaka. Bulunan ilk gösterim 37000 yıl öncesine ait olduğu bilinen bir hayvan kemiği parçası üzerindeki 29 adet çentiktir. Birli sistemde çalışmışlar, örneğin 5 sayısını göstermek için beş çentik atmak gibi. Tabii ki bu bulgunun sayıların ilk gösterimi olup olmadığı kesin değil. Uzak tarihe ait gösterimleri tam olarak bilmemiz olanaksız.

Matematiğin tarihine daha yakından bakarsak günümüz matematik dilinin ortaya çıkışının 15. yüzyılın sonuna karşılık geldiğini görürüz. 16. yüzyılda cebir alanında yapılan çalışmalar matematik notasyonunun doğmasına yol açmıştır. Bugün cebirde kullanılan birçok sembol bu dönemde oluşmuştur. Bilinmeyen çoklukların harflerle gösterilmesi, dört işlem için sembollerin kullanılması problemlerin çözümünde büyük kolaylıklar getirmiştir. İlkel bir cebirden sembolik cebire geçiş süreci, birkaç yüzyıllık bir zaman diliminde gerçekleşmiştir. Daha sonrasında, matematik dilinde birlik sağlama 19. yüzyılın sonlarına doğru daha çok ihtiyaç haline gelmiştir.

Matematiksel gelişmeye koşut olarak ortaya çıkan ve yüzyıllar öncesinden günümüze dek gelen matematiksel semboller neyi amaçlar? Bir matematiksel sembol, temsil ettiği matematiksel nesneyi açık ve kesin olarak ifade edebilmelidir. Ayrıca kullanım kolaylığı olmalı, yaygın bir şekilde kabul görmelidir. Aslında matematiksel gösterimlerin başat amacı kısaltmadır. Kısaltma olmaksızın matematik yapmak adeta olanaksızlaşır. Bunun en güzel ve basit örneği sayıların gösteriminde karşımıza çıkar. Günlük dilde bir tane kelime "on" için, bir başka kelime "yüz" için ve bir başkası "bin" için vardır ve dahası… Ama biz biliyoruz ki "on"'u "bir ve sıfır" (10), yüzü "bir, sıfır, sıfır" (100), bini "bir, sıfır, sıfır, sıfır" (1000) olarak gösteriyor ve bir rakamı farklı konum-

larda tekrar kullanarak farklı anlamlar çıkarabiliyoruz. Bu pratik ve ekonomik gösterimin keşfi insanlığın binlerce yılını almıştır.

Matematiksel sembol yaratmanın ustaları: Leibniz, Euler ve Peano

Matematik tarihinde sadece birkaç matematikçi evrensel olarak kabul edilen sembollerden iki veya üçten fazlasını icat edebilmiştir. Gottfried Leibniz (1646-1716), Leonhard Euler (1707-1783), Giuseppe Peano (1858-1932) mükemmel semboller yaratmışlardır. Leibniz, diferansiyel ve integral hesapta, Peano matematiksel mantıkta günümüzde de kullandığımız gösterimleri ifade etmişlerdir. Euler ise matematiğin farklı alanlarına ait notasyon yaratmakta çok başarılı olmuştur. Sayılardaki *e* ve *i* simgeleri, $\sum$ ile gösterilen toplam sembolü, $f = f(x)$ fonksiyon sembolü, trigonometrideki *sinx, cosx*, logaritmadaki *logx* sembolleri, üçgenin kenar uzunluklarının *a, b, c* gibi küçük, köşelerinin *A, B, C* gibi büyük harflerle gösterilmesi, *r* iç teğet çemberin, *R* çevrel çemberin yarıçapları, *S* çevrenin yarısı olmak üzere bir üçgenin temel altı uzunluğu arasındaki ilişkiyi sergileyen $4RrS = abc$ eşitliği Euler'e aittir.

Nitelikli bir matematiksel notasyon nasıl tanımlanır? Bu soruyu Amerikalı matematikçi Alferd North Whitehead (1861–1947) şöyle yanıtlar: "İyi bir notasyon, beyni bütün gereksiz işlerden kurtarmakla daha ileri problemler üzerinde yoğunlaşması için özgür bırakır ve sonuçta insanın zihinsel gücünü geliştirir." Bu tanıma uygun en güzel örnekleri Leibniz vermiştir; kullandığı gösterim sistemi açık, kesin ve zariftir. Bugün diferansiyel ve integral hesapta kullanılan teknik dil büyük ölçüde Leibniz'e aittir. Onun bulduğu sembolleri matematikçiler, daha ileriki kuramsal çalışmalarda kolaylıkla kullanabilmiştir. Notasyon yazımında Leibniz'i diğer matematikçilerden ayıran en belirgin yan, sembolleri öngörüyle yaratmasıdır. Örneğin Newton, bir f fonksiyonunun birinci ve ikinci türevlerini önce $\dot{f}$ olarak göstermiş ardından f'nin üstündeki noktanın kâğıttaki başka bir noktayla veya bir lekeyle karıştırılabileceği itirazı üzerine $f^{\bullet}$ ve f' olarak değiştirmiş-

tir. Leibniz ise $\frac{df}{dx}$, $\frac{d^2f}{dx^2}$ sembollerini kullanmıştır. Bu iki gösterim arasında diferansiyel hesap kuramına uygunluk bakımından önemli farklar vardır. f' yazılımı yanıltıcı olabilir; çünkü f 'nin türevinin hangi değişkene (z, t olabilir) göre alındığı belirsizdir. Leibniz bu sorunu görebildiğinden $\frac{df}{dx}$ kullanmıştır. Ayrıca $\frac{d^nf}{dx^n}$ gösterimi, n pozitif tamsayıyken ardışık türevlerin sayısını ifade eder, bu da bize n'nin negatif veya rasyonel sayı değerleri için $\frac{d^nf}{dx^n}$ yazılımına göre yorum yapma olanağı sağlar.

Günümüz matematik dilinde kullandığımız $\cup$, $\cap$, $\exists$ gibi bazı semboller İtalyan matematikçi Giuseppe Peano'ya aittir. Kurucusu olduğu matematik dergilerinde yayımladığı makalelerde matematik notasyonunda çığır açmıştır. Daha önce Leibniz'in de hayali olan, öğrenilmesi kolay uluslararası bir dil yaratmaya çalışmış ama yaygınlaşmasını sağlayamamıştır.

Bertnard Russell, (1872-1970) 1900'deki ünlü Paris Konferansı'nda Peano'yla karşılaşmasını entelektüel hayatının dönüm noktası olarak görmüştür. Russell, Peano'nun matematiksel mantık ve dil üzerine yaptığı çalışmalara olan hayranlığını şu sözlerle ifade etmiştir: "Onun yarattığı matematiksel notasyonu inceledikçe, anlatmak istediği şeyi azaltmadan, ona zarar vermeden, kullandığı sembollerin ortaya koyulan matematiksel düşünceyi nasıl güçlendirdiğini gördüm, yıllardır aradığım şey buydu ve yeni bir teknik kazanmış oldum."

Matematiksel semboller, matematik dilinin sözcükleri gibidir. Nasıl ki bir düşünceyi doğru ve güzel bir biçimde aktarabilmek için özenle seçilmiş uygun sözcüklere gerek varsa, matematik yapmak için de güçlü, nitelikli sembollere gerek vardır. Matematik tarihine bakıldığında birçok matematikçinin daha mükemmel semboller yaratma çabası içinde olduğu görülür. Belki de Cahit Arf, *İnce Memed*'i iki sayfaya indirgemeyi hayal ederken bu mükemmel sembollerin gücüne güveniyor-

du! Haklıydı, semboller olmasaydı Cahit Arf ismi matematik tarihine yazılamayacaktı ve yeryüzünde tek bir kişi bile onun matematiksel keşiflerini ifade edemeyecekti. Oysa bugün, matematik literatüründeki *Arf(x), Arf(y)* kısaltmalarıyla matematik yapan matematikçiler var.

Kuşkusuz, matematik sembolleri matematik yapan herkes için gerekli. Onlar olmasaydı matematiğin büyülü dünyasındaki o güzel yolculuklara çıkamayacaktık. Galile'nin "evrenin dili" dediği matematik, dünyanın her yerinde ırk, din, dil farkı gözetmeksizin tüm insanların ortak dili olamayacaktı.

Bazı matematiksel gösterimlerin kısa tarihçesi

+, −, ×, ÷ (Dört işlem işaretleri): Onbeş ve onyedinci yüzyıllar arasında ortaya çıkan bu semboller, Alman ve İngiliz matematikçiler tarafından ifade edilmiştir. (+) ve (−) işaretlerini ilk kez Jean Viedman 1489'da yayımlanan *Pratik Matematik* isimli kitabında kullanmıştır. Toplama işareti, Latincede "ve" anlamına gelen ve ön ek olarak kullanılan "et" sözcüğünün ikinci harfi olan "t" den türetilmiştir. Bölme sembolü olan (÷) işaretine ilk kez 12. yüzyılda yazılan Arapça eserlerde rastlanmıştır ve bu işaret söz konusu eserlerde kesirli değerleri göstermek amacıyla kullanılmıştır; Avrupalılar ise önceleri bu sembolü çıkarma işlemini tanımlayan bir sembol olarak kullanmışlar, daha sonra çıkarma işareti (−) olarak bu gösterim günümüze dek gelmiştir. Çarpma işareti ilk kez 1631'de William Oughtred tarafından (×) olarak kullanılmıştır. Leibniz, John Bernoulli'ye gönderdiği mektupta (×) işaretinin yazılışının pratik olmadığını ve bilinmeyen için kullanılan *x* harfiyle karışabileceğini öne sürerek, (a·b) biçimindeki noktayla olan gösterimi kullandığını yazmıştır.

= (Eşitlik işareti): 1557 yılında Galli matematikçi Robert Recorde, çalışırken "eşittir" sözcüğünü bıktırıcı bir biçimde tekrar tekrar yazmanın zorluğunu belirtmiş, "Paralel iki çizgi koydum, çünkü paralel iki çizgiden daha eşit bir şey olamaz." diyerek bu sembolü kullanan ilk kişi olmuştur.

$\sqrt{}$ (Karekök sembolü): Bu sembol ilk kez 1525'te Kristof Rudolff tarafından kullanmıştır. Bazı matematik tarihçileri

Rudolff'un bu sembolü İngilizcede "kök" anlamına gelen "radix" sözcüğünün ilk harfi olan küçük "r" den türettiğini varsaymışlardır.

***n*! (Faktöryel sembolü):** Bu sembolü ardışık pozitif tamsayıların çarpımının gösterimindeki zorluğu aşmak için ilk kez 1808'de Christian Kramp kullanmıştır. Sayının sağına ünlem işaretinin koyulma nedeni sayı büyüdükçe çarpımdaki büyümeye dikkat çekmek olarak yorumlanmıştır.

∃, ∀ (Niceleyici sembolleri): ∃ sembolünü ilk kez, 1897'de Giuseppe Peano *Matematik Formülleri* ismiyle yayınladığı kitabında kullanmıştır. ∀ sembolü ise Gerhard Gentzen tarafından ∃ sembolünün ortaya çıkışından 38 yıl sonra 1935'te yaratılmıştır. Günümüz matematiğinde birbirinin tamamlayıcısı olan bu sembollerin 38 yıl arayla ifade edilmiş olması matematik notasyonunun gelişimini çok iyi anlatır.

∅ (Boş küme sembolü): Norveç alfabesinde bir harf olan bu sembol ilk kez N. Bourbaki grubunun 1939'da yayımlanan *Elemanter Matematik* isimli kitabında kullanılmıştır. Bourbaki grubunun üyesi Fransız matematikçi André Weil bir yazısında, kızının okulda "boş kümeyi" kendilerinin önerdiği bu sembolle öğreniyor olmasından gururlandığını ifade etmiştir.

∞ (Sonsuz sembolü): Bu sembol ilk kez 1665'te İngiliz matematikçi John Wallis'in yayımladığı bir kitapta yer almıştır. Wallis bu sembolü Yunan alfabesinin son harfi olan *ω*'dan (omega) esinlenerek "*sonsuz*, son sayı olsaydı son harfle gösterilirdi" düşüncesiyle türetmiştir.

∫ (İntegral sembolü): Bu sembolün yaratıcısı Leibniz'dir. Eğri altında kalan alanı "sonsuz küçük alanların" toplamı olarak ifade ettiğinden Latincede toplama anlamına gelen SUMMA sözcüğünün ilk harfi olan S'nin uzatılmış şeklini integral sembolü olarak kullanmıştır.

0 (Sıfır): *Sıfır* kavramının ilk olarak hangi medeniyet içerisinde ve kim tarafından kullanıldığı belirsizdir ama *sıfır* sayı işareti olarak ilk kez milattan sonra 5. yüzyılda yazılı Hint eserleri içinde görülmüştür. Hint Dünyası'nın ünlü matematikçi ve astronomu Brahmaqupta 632 yılında yazdığı *Siddihanta* isimli eserinde dokuz ayrı sayı işaretinin yanında sıfırı da kullanarak hesapla-

malar yapmıştır. Hint bilginleri, dokuz ayrı rakamın bazı sayıları ifade etmekte yetersiz kaldığını görmüşler, eksik kalan basamağı önce boş bırakmışlar sonra "." (nokta) koymuşlar, sonrasında da "0" (sıfır) işaretini kullanılmışlardır. Bugünkü basamak sistemiyle örneklersek, *beş yüz yedi* sayısı önce "5 7", sonra "5.7" ve sıfır işaretini kullanarak "507" olarak yazılır. Hint bilginleri çember şeklinde gösterdikleri *sıfır* için bir şeyin hiçliği ve boşluğu anlamına gelen *sunya* sözcüğünü kullanmışlar.

π **(Pi sembolü):** Dairenin çevresinin çapına oranından elde edilen sayıyı gösteren π, Yunanca çevre ya da çevre uzunluğu anlamına gelen περίμετρον (perifereia) sözcüğünün ilk harfidir. Bu sembolü ilk kez William Jones 1706'da yayımlanan *Yeni Matematiğe Giriş* isimli kitabında kullanmıştır. Ama daha sonra Euler'in analiz kitaplarında π'yi kullanmasıyla bu sembol evrensel olarak kabul edilmiştir.

$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ **(Doğal logaritma tabanının simgesi):** *e* simgesi ilk kez Euler tarafından 1728'de yayımlanan bir makalede kullanıldığında, Euler henüz 21 yaşındaydı. Euler'in doğal logaritmanın tabanı olan sayıyı "*e*" harfiyle göstermiş olması birkaç nedene bağlanmıştır. Adının ilk harfini kullanmış olabilir, ama Euler'in alçakgönüllü kişiliği düşünüldüğünde bu seçeneğin küçük bir olasılığa sahip olduğu söylenebilir. Euler'in *e*'yi sembol olarak seçmesindeki asıl neden, Latince kökenli "*exponential*" (üs alma) sözcüğünün ilk harfini kullanması olabilir ki, bu açıklama *e* sayısının ortaya çıkışı incelendiğinde oldukça gerçekçi görünüyor.

$i = \sqrt{-1}$ **(Sanal birim simgesi):** İlk kez 1777 Euler tarafından yayımlanan bir makalede kullanılmıştır. Euler'in bu simgeyi Latince *imāginārius* sözcüğünün ilk harfi olan *i*'yi $\sqrt{-1}$ 'in sanal bir sayı olduğunu belirtmek için kullandığı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

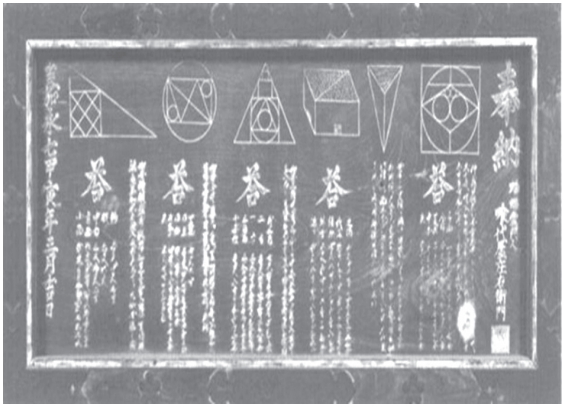
1) Florian Cajori, (1929). *A History of Mathematical Notations*, Dover Publications, 1993.
2) Davis Philip J.,ReubenHersh, (2005) *Matematiğin Seyir Defteri*, Çev. Abadoğlu E, Doruk Yayımcılık

TANRIYA ADANAN MATEMATİK: SANGAKU

Ateist olduğu bilinen ünlü Macar matematikçi Paul Erdös, bir Katolik okulunda verdiği derste "Beni burada rahatsız eden tek şey çok fazla 'artı işareti' olması" esprisini yapmıştır. 20. yüzyılda yaşamış olan Erdös, 18. yüzyıl Japonya'sında, duvarlarında matematik problemlerinin asılı olduğu, matematiğin nefes aldığı, ibadetin matematiğe dönüştüğü bir tapınağı ziyaret etseydi neler söylerdi acaba?

17. yüzyılın başlarından 1857'ye dek, iki yüz yıldan fazla bir zaman dilimi içinde matematiksel, çoğunlukla da geometrik problemlerin ya da teoremlerin renkli resimlerle anlatıldığı tahta tabletler Japon tapınaklarını süslemiştir. Samuray, çiftçi, tüccar gibi çeşitli mesleklere sahip amatör ve profesyonel birçok Japon matematikçi geometrik problemlerle bezenmiş *sangaku* adı verilen ahşap tabletleri Budist ve Shinto tapınaklarına asmışlardır. Zor problemler hazırlayan, çözen birçok kişi bu işi Tanrı'nın yardımıyla yaptığına inanarak *sangaku* tabletlerini bir şükran ifadesi olarak Tanrı'ya adamıştır. Problemlerin tapınaklarda sergilenmesini bir kenara bırakacak olursak, yapılan şey bir cesaret gösterisi olarak da görülebilir. Bu tabletleri asanlar kendilerinin ne kadar yetenekli olduklarını göstermekle birlikte "Çözmeye cüret et" biçiminde meydan okumak istemiştir.

Sangaku problemlerinin tamamı Tapınak Geometrisi olarak bilinmektedir. *Sangaku* matematiği üzerine araştırmalar yapan Amerikalı matematikçi Tony Rothman günümüze dek gelen bu tabletlerde yapılan çalışmaları "halk matematiği" olarak adlandırmakla birlikte; birçok *sangaku*nun sıra dışı, zor ve çözümlerinin de son derece zekice olduğunu, bazı problemlerin çözümünde uygulanan yöntemlerle daha önce kendisinin hiç karşılaşmadığını belirtiyor.



Bu sangaku 1854'te Ueno şehrindeki Sugawara Tenman tapınağına Hojiroya Shöemon tarafından asılmıştır.

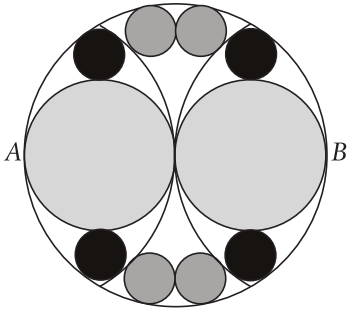
Dini amaçla yapılmış, bir sanat çalışması olarak da görülebilecek bu tabletlerin çoğunda sadece problemler yazılmıştır, çözümleri yoktur. Başka bir tapınağın duvarına asılan çözümleri inceleyen matematikçiler buldukları daha kısa çözümleri diğer bir tapınağın duvarına asarak problemlerin yaygınlaşmasını sağlamışlardır. Günümüz ibadet mekanlarında matematiksel problemlerin sergilendiğini hayal etmek, *sangaku* problemlerinin o dönemin Japonya'sına olan etkisini anlamayı kolaylaştırabilir.

Sangaku matematiği, "shougun" önderlerinin aldıkları kararlarla Japonya'nın Batı'dan tümüyle izole edildiği dönemde ortaya çıkmıştır. O dönemde Japon matematiğinde Batı'dan bağımsız benzersiz birçok gelişme gerçekleşmiştir. Japon matematikçilerinin Batı'da Newton ve Leibniz tarafından keşfedilen "sonsuz küçükler hesabı"ndan habersiz olarak yaptıkları çalışmalarla Batı standartlarının gerisinde kalmış olmalarına karşın bazı tabletlerde günümüz orta öğretim matematiğiyle çözülebilen basit

problemler yer alırken bazılarındaysa türev, integral bilgisi gerektiren zor sorular sorulmuştur. *Sangaku* tabletlerine daha çok Öklid Geometri'siyle ilgili problemler yazılmıştır

Sangaku tabletlerinin günümüz dillerine ve anlamlı sayılara çevrilmesi sadece birkaç on yıl önce gerçekleşebilmiştir. Japon matematik öğretmeni Fukagawa Hidetoshi ve Dan Pedoe, Tony Rothman gibi matematikçiler hazırladıkları kitaplarla yüzlerce *sangaku* problemini matematikseverlerle buluşturmuşlardır.

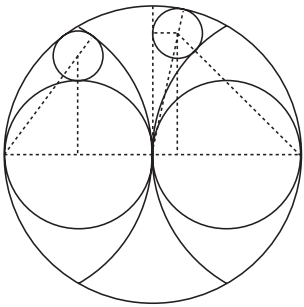
Kolay bir sangaku problemi (Tavus kuşu kuyruğu)



Bu sangaku 1865 yılında Okuda Tsume adındaki bir kadın tarafından Ogaki şehrindeki Meiseirinji tapınağına asılmıştır.

Şekilde 2*R* çaplı çember içine *A* ve *B* merkezli *R* yarıçaplı iki yay, bu yaylara ve büyük çembere teğet *R* çaplı açık gri renkte iki çember, *t* yarıçaplı siyah renkte dört çember, *t'* yarıçaplı koyu gri renkte dört çember çizilmiştir. $R = 6t = 6t'$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:



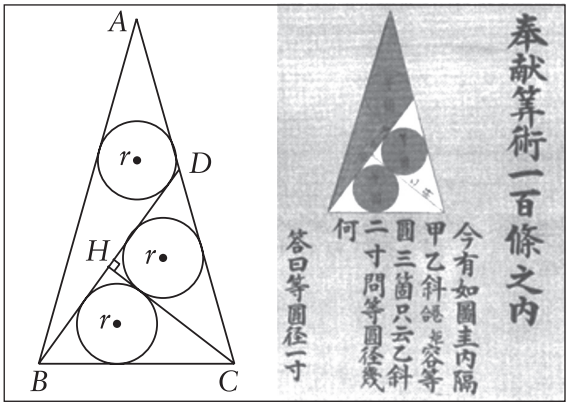
Solda kesik çizgilerle çizilmiş dik üçgende ve sağda yükseklikleri ortak olan iki dik üçgende Pisagor Teoremi yazıldığında

$$\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{2} + t\right)^2 = (R-t)^2,$$

$$(R-t')^2 - (t')^2 = (R+t')^2 - (R-t')^2$$

elde edilen eşitliklerin ortak çözümünden $R = 6t = 6t'$ bulunur.

Zor bir sangaku problemi



Şekilde orijinal tabletinin fotoğrafı görülen problemde *ABC* ikizkenar üçgen, $|AB| = |AC|$. Dik kesişen *BD* ve *HC* doğru parçaları *ABC* üçgenini iç teğet çemberleri eş olan üç üçgene bölmektedir. Çemberlerin yarıçap uzunlukları r ise $|CH| = 4r$ olduğunu gösteriniz.

Bu *sangaku* 1806'da Ehara Masanori tarafından Atsuta tapınağına çözümsüz olarak asılmış ve daha sonra kaybolmuştur. Ama bilinmeyen bir tarihte matematikçi Kitagawa Möko (1763-1839) tapınağı ziyaretinin ardından soruyu tekrar yazarak çözümü açıklamıştır. Defalarca Pisagor Teoremi'nin kullanıldığı bu uzun çözüm *Sacred Mathematics* (Kaynak 1) isimli kitapta yayımlanmıştır. Farklı yollardan çözülebilecek bu sorunun Michel Cabart tarafından verilen trigonometrik çözümünü aşağıya özetliyorum.

$$\mathrm{m}(B\widehat{D}C) = x,\ \tan\frac{x}{2} = t,$$

$|DC| = 1$ birim ($|DC|$ bir değişkene de eşit olabilir.),

HDC ve *ABD* üçgenlerinin iç teğet çemberlerinin merkezleri sırasıyla O_1 ve O_2 olsun.

$\overset{\Delta}{DCO_1}$'de $\dfrac{r}{|DC|}=\dfrac{\tan D\hat{C}O_1.\tan C\hat{D}O_1}{\tan D\hat{C}O_1+\tan C\hat{D}O_1}$

$$r=\frac{\tan\left(45-\frac{x}{2}\right).\tan\frac{x}{2}}{\tan\left(45-\frac{x}{2}\right)+\tan\frac{x}{2}}$$

$$r=\frac{t(1-t)}{1+t^2} \qquad (I)$$

$\overset{\Delta}{BDO_2}$'de $\dfrac{r}{|BD|}=\dfrac{\tan B\hat{D}O_2.\tan D\hat{B}O_2}{\tan B\hat{D}O_2+\tan D\hat{B}O_2}$

$$\frac{r}{2\cos x}=\frac{\tan(90-\frac{x}{2}).\tan(90-\frac{3x}{2})}{\tan(90-\frac{x}{2})+\tan(90-\frac{3x}{2})}$$

$$r=\frac{1-3t^2}{2t(1+t^2)} \qquad (II)$$

(I) ve (II) ifadelerinin eşitliğinden

$2t^3-5t^2+1=0$ denklemi elde edilir.

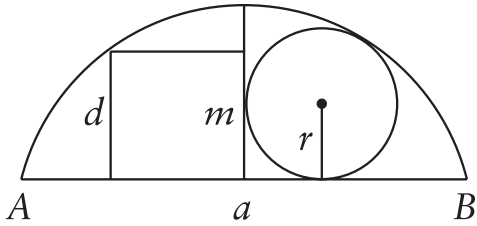
$(2t-1)(t^2-2t-1)=0$

$t=1\pm\sqrt{2}$ olamaz, çözüm $t=\dfrac{1}{2}$ dir.

$t=\tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}$, $HC=\sin x=\dfrac{4}{5}$,

$r=\dfrac{1}{5}$ *ve* $|HC|=4r$ olur.

Daha zor bir sangaku problemi



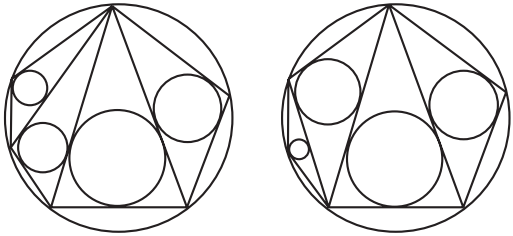
Şekilde *AB*'yi kiriş kabul eden çember yayını iki eş parçaya ayıran *m* uzunluğundaki orta dikme ve bir kenarı bu dikme üzerinde diğer kenarı *AB* kirişinde, bir köşesi çember yayı üzerinde kenar uzunluğu *d* olan bir kare ve kirişe, yaya, kareye teğet, yarıçap uzunluğu *r* olan bir çember çizilmiştir.

$|AB| = a,\ p = a + m + d + r,\ q = \frac{m}{a} + \frac{r}{m} + \frac{d}{r}$ ise,

a, m, d, r'nin *p* ve *q* türünden eşitini bulunuz.

Bu *sangaku* 1815'te Zenkoji tapınağına Saito Mitsukuni tarafından asılmıştır. Tablete Saito şöyle yazmıştır: "Bu problem ilk olarak Kyoto'daki Gion tapınağında Tsuda Nobuhisa tarafından 1024. dereceden bir denklemin kökleri olarak sunulmuştur. Ama ünlü matematikçi Ajima Naonobu bir gün bu *sangaku*nun asılı olduğu tapınağı ziyarete gider ve çözümün çok uzun olduğunu sezerek *a* değişkenine bağlı 10. dereceden bir denklemle çözümü kısaltır." Tam bir sayfa tuttuğu bilinen bu çözümü Ajima 42 yaşında gerçekleştirmiştir ve bu başarısı ona bir matematikçi olarak büyük ün kazandırmıştır.

Şiirsel bir sangaku teoremi



Bir daire içine çizilmiş bir dışbükey çokgeni bir köşesinden bütün köşegenlerini çizerek üçgensel bölgelere ayıralım ve her üçgenin iç teğet dairelerini çizelim. Bu dairelerin yarıçap uzunluklarının toplamı, çokgeni üçgensel bölgelere nasıl ayırırsanız ayırın hep aynıdır. Yukarıdaki her iki şekilde de yarıçap uzunluklarının toplamı birbirine eşittir.

Bu güzel teorem 1800'de Tsuruoka şehrinde Sannösha tapınağına Tanrı'nın şanı ve *sangaku* yaratıcılarının onuru adına asılmış. Eski Bir Japon Teoremi adıyla bilinen bu teoremin birçok değişik kanıtı yapılmıştır.

KAYNAKLAR

1) Fukagawa Hidetoshi, Tony Rothman, *Sacred Mathematics*, Princeton University Press, 2008
2) http://www.cut-the-knot.org

MATEMATİK KÖYÜ'NDEKİ PARABOL

Nesin Matematik Köyü'nün ziyaretçisi olduğum bir gündü. Dersten çıkan öğrenciler Köy'ün meşhur lokantası Bol Kepçe'de öğle yemeğindeydiler. Yemek tepsimi alıp liseli bir gencin karşısına oturdum. "Afiyet olsun" dedim, yanıt vermedi, sürekli masanın köşesine bakıyordu. Duymamıştır diye düşünerek çorbaya kaşık sallamaya başlamıştım ki dalgın "yemek arkadaşım" aniden "parabol" diye seslendi. Şaşkınlıkla ben de masanın köşesine baktım. Acaba orada bir parabol mü çiziliydi? Örtüsü olan bir yemek masasında parabolün ne işi vardı?

Pardon, "parabol" dediniz, anlayamadım.

Özür dilerim, kafamda bir soru vardı, daha doğrusu kendime sorduğum bir soru, onu çözdüm herhalde.

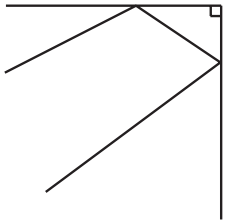
Neydi soru? Ben de matematik öğretmeniyim.

Birkaç gündür geometri derslerinde konikler anlatılıyor, bugün de parabolü inceledik. Az önce şöyle düşünüyordum: Aynayla kaplı iki duvarın dik kesiştiği köşeyi hayal edersek, duvarlardan birine gelen ışık ışını ilk duvara yansıdıktan sonra diğer duvardan ilk ışına paralel bir yol izleyerek yansır. (Şekil 1) Işınların yansıdıkları noktalarda duvarlara (doğrulara) teğet olan bir eğri var, o eğrinin parabol (Şekil 2) olduğunu keşfettim; çünkü

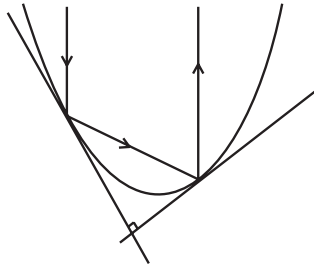
parabolde odaktan gelen ışınlar yansıdıktan sonra parabolün simetri eksenine paralel bir yol izliyorlar.

Aşağıdaki şekiller, adının Can olduğunu öğrendiğim bu düşünme tutkunu öğrencinin sözünü ettiği problemi ifade etmektedir. Bu problemi yazının sonunda inceleyeceğiz.

Şekil 1



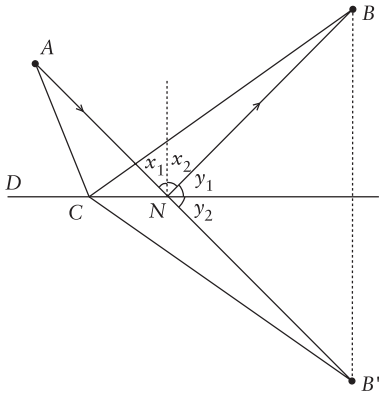
Şekil 2



Can'la birlikte çok güzel bir yolculuğa çıkmıştım, ama onun anlattıklarında ikimizin de kafasına takılan bazı sorular vardı. Bu soruları yanıtlamak için bir köşeye çekildik, o günün bütün öğleden sonrasını "parabol"e ayırdık. O gün ve daha sonrasında birbirimize sorduğumuz soruları ve neleri kanıtladığımızı merak edenler için:

Gelen ışın açısının ölçüsü yansıyan ışın açısının ölçüsüne neden eşittir?

Havasından mıdır, suyundan mıdır bilinmez (!) Matematik Köyü, insanın keşfetme duygusunu, soru sorma isteğini kışkırtıyor. Daha oturur oturmaz "optik" bilgimin yok denebilecek kadar az olduğunu fark ederek, Can'a "Yansıma nedir?" diye sordum. Onun verdiği yanıtın özeti şöyle: "Fizik yasaları gereğince bir ışık ışını düzlemde yolunu en kısa zamanda tamamlar; o yüzden bir doğru boyunca yol alır. Aynayı bir doğru şeklinde düşünürsek, aynaya θ ölçüsündeki bir açıyla gelen ışık ışını yansıdıktan sonra yine θ ölçüsündeki bir açıyla yoluna devam eder. Bu açıların ölçülerinin eşit olması ışının en kısa yoldan en kısa zamanda gitmesi anlamına gelir." Şimdi, ortaokuldan bu yana çok iyi bildiğimiz ve çok kullandığımız bu teoremi kanıtlayalım.



Şekil 3

Şekil 3'teki D doğrusu aynamız olsun. Işın ANB yolunu izlesin. N noktasından D'ye çizdiğimiz dikmeyle oluşan açıların ölçülerinin eşit olduğunu kabul edelim. $(x_1 = x_2)$ B noktasının D doğrusuna göre simetriği B' ise D, BNB' açısının açıortayıdır. $(y_1 = y_2)$ Buradan $x_1+y_2 = 90°$ olacağından A, N, B' noktaları doğrusaldır. B ve B' noktaları simetrik olduğundan,

$$|AN|+|NB| = |AN|+|NB'| = |AB'| \quad (1)$$

olur. Bir üçgende iki kenarın uzunlukları toplamı diğer kenarın uzunluğundan büyük olduğundan

$$|AB'| \leq |AC|+|CB'| = |AC|+|CB| \quad (2)$$

elde edilir. (1) deki $|AB'|$ (2) de yerine yazılırsa:

$$|AN|+|NB| \leq |AC|+|CB|$$

bulunur. Bu sonuç bize, ışının N noktasından yansıyarak gideceği yolun başka bir noktadan (C noktası) yansıdığında gideceği yoldan daha kısa olduğunu gösterir.

Eğer, $x_1 \neq x_2$ olsaydı ve B' noktasını Şekil 3'teki gibi belirleseydik A, N, B' noktaları doğrusal olmayacak, $[AB']$ doğru parçası D doğrusunu N'den farklı bir noktada kesecekti. Bu nokta C olsun.

Bu durumda;

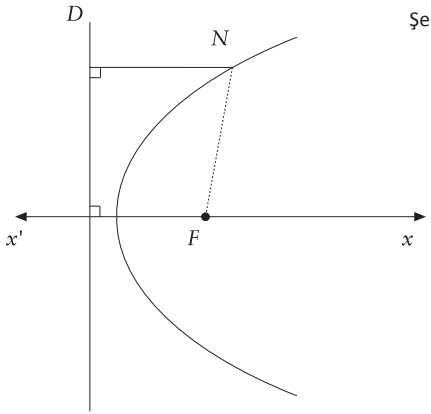
$|AN|+|NB| = |AN|+|NB'| \geq |AB'|$ (1) ve

$|AB'| = |AC|+|CB'| = |AC|+|CB|$ (2) olur.

(1) ve (2) den $|AN|+|NB| \geq |AC|+|CB|$ eşitsizliği elde edilir ki bu da ışının C'den geçmekle daha kısa bir yol izlediğini gösterir. Böylece ışının en kısa yolu izleyebilmesi için gelen ışın açısının ölçüsünün yansıyan ışın açısının ölçüsüne eşit olması gerektiğini kanıtladık.

Parabol nedir?

Can, "Parabolü bir ayna gibi düşünelim, ışınların bu aynada yansıdıktan sonra ne yönde gideceklerini bulalım." dedi. Peki, o zaman parabolün tanımını hatırlayalım: Bir düzlemde sabit bir D doğrusuna ve sabit bir F noktasına eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yerine **parabol** denir. (Şekil 4) F noktasına parabolün odağı, D doğrusuna parabolün doğrultmanı, odaktan doğrultmana dik olarak çizilen xx' doğrusuna parabolün simetri ekseni adı verilir.



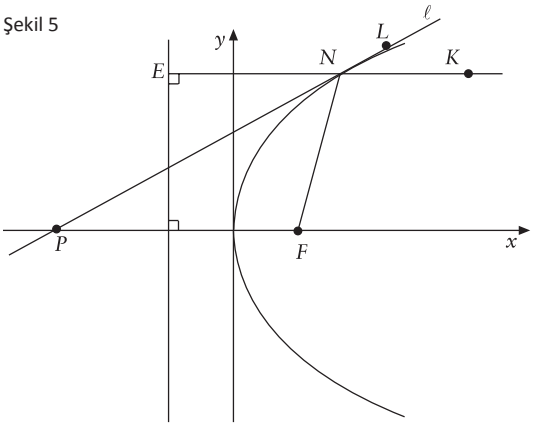
Şekil 4

Parabol bir aynadan ışık ışını nasıl yansır?

Işık ışınının düz aynadaki yansıma kuralını bulduk Şimdi de parabol bir aynada yansıma kuralının ne olduğunu araştıracağız. Daha doğrusu parabolün odağından gelen ışının parabolün simetri eksenine paralel bir yol izleyerek yansıdığını göstereceğiz. Bunun için düz aynadaki yansıma kuralından yararlanacağız.

Şekil 5'te görüldüğü gibi ışının aynadaki yansıma noktasından parabole bir teğet çizeceğiz ve parabole göre yansımayı bu teğete göre yansıma olarak ifade edeceğiz.

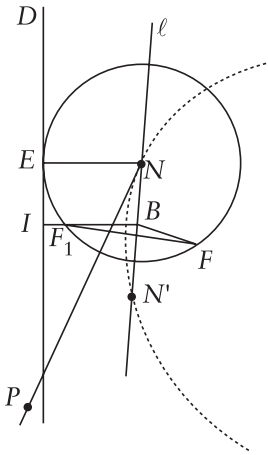
Şekil 5



Şekil 5'teki [*NK* ışınının parabolün simetri eksenine paralel olduğunu göstereceğiz. Bunu türev ve analitik geometriyi kullanarak yapabiliriz ama bu çalışmalarımızda sentetik geometrinin dışına çıkmama kararındayız. Açıkçası Can'la kanıtlamakta en zorlandığımız bölüm burasıydı. Araştırarak gerçekleştirdiğimiz bu çalışmayı aşağıda özetliyorum.

Şekil 5'te $m(\widehat{PNF}) = m(\widehat{KNL})$ olduğunu biliyoruz. (Gelen ve yansıyan ışınlar) *N* noktasından parabolün doğrultman doğrusuna [*NE*] dikmesini inelim. [*NK* ışınının parabolün simetri eksenine paralel olduğunu kanıtlamak için *E*, *N* ve *K* noktalarının doğrusal olduğunu göstermeliyiz. Bunun için de [*PL*] nin *ENF* açısının açıortayı olduğunu kanıtlayacağız. Başlayalım: Şekil 5'te değme noktası olan *N*'yi merkez kabul eden |*NF*| yarıçaplı bir çember çizelim. Bu çizim şekil biraz büyütülerek Şekil 6 da yapılmıştır.

F odak, D doğrusu doğrultman, parabolün tanımı gereği $|NE| = |NF|$ olduğundan bu çember doğrultmana E noktasında teğettir. Şimdi parabol üzerinde başka bir N' noktası alalım ve NN''den geçen doğruya ℓ adını verelim. F nin ℓ'ye göre simetriği olan F_1 noktası çemberin üzerindedir. F_1 noktasından parabolün eksenine çizilen paralel, ℓ'yi B'de, doğrultmanı da I noktasında kessin. Bu arada önce B noktasının parabolün içinde olduğunu gösterelim. $|BF_1| < |BI|$, $|BF_1| = |BF|$ olduğundan $|BF|<|BI|$ dır. O halde B noktası parabolün içindedir ve N ile N' arasındadır.



Şekil 6

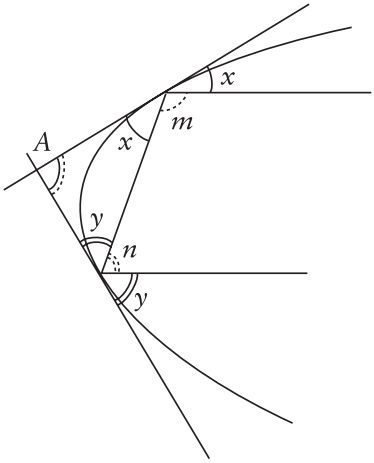
Bu bölümde anlatılacaklar için okurun, Şekil 6 üzerinde kalemle uygulama yapmasını öneririm.

Şimdi ℓ doğrusunu N noktası sabit kalmak üzere, N noktası etrafında sola doğru döndürelim. Bu durumda N', N ye yaklaşır ve sonunda (limit durumunda) N' noktası N noktası ile çakışır. Böylece ℓ doğrusu parabole N noktasında teğet olur. B de N ye N' ile birlikte yaklaşır, N ile (limit durumunda) çakışır. Ayrıca ℓ doğrusu döndürüldükçe F nin ℓ'ye göre simetriği olan F_1 noktaları da E noktasına yaklaşır, limit durumunda E'ye ulaşır. F ve F_1 noktaları ℓ'ye göre simetrik olduklarından ℓ doğrusu daima F_1BF açısının açıortayıdır ve limit durumunda da açıortay olacaktır. Şekil 5'te çizdiğimiz ℓ'nin alt kümesi olan $[NP$ ışını da ENF açısının açıortayıdır. Dolayısıyla Şekil 5'te $m(\widehat{ENP}) = m(\widehat{FNP}) = m(\widehat{LNK})$ olur ki bu da E, N, K noktalarının doğrusal olduğunu gösterir ve parabolün yansıma özelliği kanıtlanmış olur. Bu kanıt aynı zamanda parabolün simetri eksenine paralel olarak gelen ışının parabol tarafından odağa yansıtılacağının da kanıtıdır.

Can yemekte neyi keşfetmişti?

Can, o gün yemekte odaktan gelen ışının parabolün kollarındaki yansıma noktalarını düşünmüş ve o noktalardan parabole çizilen teğetlerin dik kesiştiğini kanıtlamıştı. Bu yazının buraya kadarki bölümünde Can'ın kanıtını incelerken aklımıza takılan soruları ve yanıtlarını özetlemeye çalıştım. Şimdi de o kanıtı veriyorum. (Şekil 7)

Şekil 7



$2x+m+2y+n = 360°$, $m+ n = 180°$ eşitliklerinden, $x+y = 90°$ ve $m(\hat{A}) = 90°$ bulunur.

Ben yemeğe oturduğumda Can, kafasından yukarıdaki eşitlikleri düşünüyormuş, teğetlerin dik kesiştiğini keşfetmiş ve şaşırarak, heyecanla "parabol" diye seslenmiş. Heyecanlanıyor, şaşırıyor ve keşfediyor. Matematik yapmak bu olsa gerek.

KAYNAKLAR

1) T. Kaptanoğlu, Koninin Kesitleri (1), *Matematik Dünyası*, 1995, Cilt 5, Sayı 4.
2) T. Çizenel, *Geometri: Lise 3 Fen Kolu*, İnkilap ve Aka, İstanbul, 1975.

BESLENMENİN MATEMATİĞİ

Yıllar önce matematik olimpiyatlarına hazırlanan ilginç bir öğrenciyle karşılaşmıştım. Deniz, matematiği çok seven, çok çalışan, yetenekli bir öğrenciydi. En büyük hayali olimpiyatlarda altın madalyayı kazanmaktı. Az uyuyarak saatlerce çalışır, verilen egzersiz programından fazlasını yapardı. Olimpiyatlara hazırlık onun için bir yaşam biçimiydi. Bana ilginç gelen asıl yanı ise bir "takıntısının" olmasıydı. Sürekli iyi beslenemediğinden, uykusuz kaldığından yakınırdı. Bir sporcu arkadaşının önerisiyle besin ürünleri tüketerek gıda takviyesine başlamıştı. Bu ürünlerden aldığı ek gıda desteği sayesinde kendisini çok iyi hissettiğini söylüyordu. Doğal besinlerden alınan vitamin ve minerallerin çok daha değerli olduğunu söylediysem de ikna edememiştim. Ek olarak alacağı protein, vitamin, mineral vs. miktarını her ay kendisi belirleyip, eczanelerden onlarca kutu besin ürünü alıyor ve bu ürünler için gereken harcamayı yaparken de büyük sorunlar yaşıyordu.

Bir gün, "Hocam, beslenmenin matematiğini keşfettim" diyerek heyecanla yanıma gelmişti. Çantasından çıkardığı kâğıtlarda eşitsizlikler vardı, grafikler çiziliydi. "Saçmalama" dercesine gülümsedim; ama çok geçmeden yanıldığımı anladım. Çok ilginç hesaplar yapmıştı. Ek besinlerle bir ayda almayı planladığı protein, vitamin ve minerali en az harcamayla elde edebilmenin matematiksel yöntemini keşfetmişti. Çok hoş bir akıl yü-

rütmeyle en ekonomik ve en iyi çözümü bulmuştu. Daha sonra, Deniz'in bu çalışmasının 1947'de Amerikalı matematikçi George Dantzig tarafından keşfedilen Doğrusal Programlama modelinin basit bir uygulaması olduğunu öğrenmiş ve Deniz'e "Senin adın bundan sonra Dentzig olsun" diye takılmıştım.

Şimdi, Deniz'in yaptığı hesaplardan bir bölümünü anlatmaya çalışalım. Öte yandan, "Matematik ne işe yarar?", "Matematik nerede?" sorularına yanıt olarak matematiğin, bilimin her alanına nasıl kaynaklık ettiğini, Excel gibi bilgisayar programlarının başlangıç mantığının ne olduğunu basit bir örnekle açıklamış olalım.

Deniz'in her ay iki ayrı beslenme ürününü aldığını varsayalım. Bu ürünleri *M* ve *N* harfleriyle isimlendirelim. Deniz, her ay 50 mg B6 ve 1200 mg C vitamini almayı amaçlıyor. *M* ürününün 1 kutusunda 1 mg B6, 30 mg C vitamini bulunurken, *N* ürünün 1 kutusunda ise 2 mg B6, 40 mg C vitamini bulunuyor. Aşağıdaki tabloda bu bilgiler görülüyor.

	M ürünü	N ürünü	İstenen miktar
B6	1 mg	2 mg	50 mg
C	30 mg	40 mg	1200 mg

Deniz her iki üründen 15'er paket satın alırsa, $15\times1+15\times2=45$ mg B6 ve $15\times30+15\times40=1050$ mg C vitamini almış oluyor ki, bu miktarlar, B6 için 50–45 = 5 mg, C vitamini için ise 1200–1050 = 150 mg eksik kalmış oluyor.

Farklı bir seçeneği denersek: Deniz, 20 paket *M* ürününden, 15 paket de *N* ürününden satın almış olsun. Bu durumda $20\times1+15\times2=50$ mg B6, $20\times30+15\times40=1200$ mg C vitamini almış olur ki,böylece Deniz'in kendisi için belirlediği aylık miktarlara tam olarak ulaşılır.

Başka bir seçeneğe daha bakalım: *M*'den 15, *N*'den 20 paket satın alırsa, Deniz yine aylık ek beslenme ihtiyacını karşılıyor. Bu yüzden bu seçenek de bir önceki gibi olası bir çözüm. Ama

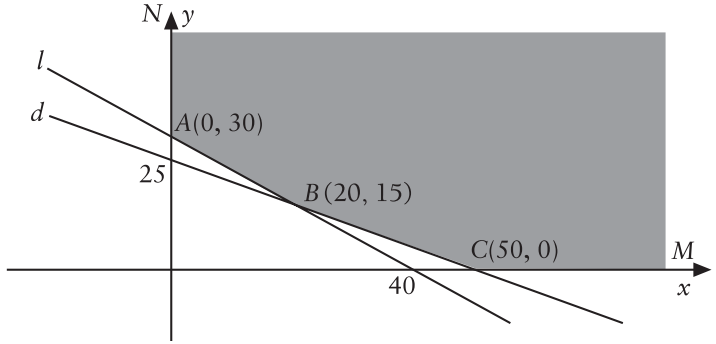
yukarıdaki ilk örnekte gösterdiğimiz gibi her iki üründen de 15'er paket satın alınması uygun bir çözüm değil.

Elbette, Deniz'in sonsuz sayıda olası çözüm seçeneği var; ama biz paket sayısının en az olduğu çözümü arıyoruz. Örneğin ek beslenme ihtiyacının tümünü sadece *M* ürününden satın alarak da karşılayabilir. Bunun için *M* ürününden en az 50 paket alması gerekir ki, $50\times1+0\times2 = 50$ mg B6 vitamini, $50\times30+0\times40 = 1500$ mg C vitamini elde edebilsin. Öte yandan sadece *N* ürününden satın alacak olursa en az 30 paket almalı; çünkü bu durumda da $30\times2+0\times1 = 60$ mg B6 vitamini ve $30\times40+0\times30 = 1200$ mg da C vitamini elde ediyor.

Yukarıda deneme yoluyla elde ettiğimiz üç uygun çözümün sonuçlarını tekrar yazalım:

1) *M*'den 20, *N*'den 15; toplam 35 paket, 2) *M*'den 50, *N*'den 0; toplam 50 paket, 3) *M*'den 0, *N*'den 30, toplam 30 paket. Şimdi, probleme bir de para faktörünü ekleyelim. Her iki ürünün de bir paketinin fiyatı 10 TL olsun. Bu durumda üç sonucun toplam fiyatları sırasıyla 350 TL, 500 TL ve 300 TL olur.Bu sonuçlar içinde en iyisi sonuncusu, yani *M* ürününden almayıp, sadece 30 paket *N*'den almak. Böylece en düşük maliyetle ek beslenme sorunu çözülmüş oluyor. Ama bu sonuçlar deneme yanılmayla bulundu. Sadece bu sonuçlar için maliyet hesapladık. Daha iyisi yapılabilir mi? Hem Deniz'in kendisi için belirlemiş olduğu aylık vitamin miktarlarını karşılayan, hem de en düşük maliyeti veren bir çözüm olabilir mi? İşte, Deniz keşfettiği yöntem ve yaptığı hesaplarla bu sorulara matematiksel yanıtlar veriyordu. Şimdi bu hesaplara göz atalım.

M ürününden x paket, *N*'den de y paket aldığımızı varsayalım. Bu durumda $x+2y \geq 50$ ve $30x+40y \geq 1200$ eşitsizliklerini yazabiliriz. Aşağıdaki grafikte $x+2y = 50$ ve $30x+40y = 1200$ doğrularının grafiklerini çizdik ve her iki eşitsizliği de sağlayan bölgeyi taradık.



d doğrusu tam olarak 50 mg B6 vitamini içeren *M*–*N* sonuçlarını gösteriyor ve bu doğrunun üst kısmında 50 mg'dan fazla B6 vitamini içeren sonuçlar var. Aynı şekilde *l* doğrusu da tam olarak 1200 mg C vitamini içeren *M*–*N* sonuçlarını gösteriyor ve bu doğrunun da üst kısmında 1200 mg'dan fazla C vitamini içeren sonuçlar var. Bu iki bölgenin kesişimi olan taralı bölge ise olası çözümlerin tamamını gösteriyor.

Bu grafik üzerindeki *A*, *B*, *C* noktaları olası çözümlerin uç noktalarıdır, yani *x*+*y*'nin en küçük olmasını sağlayan noktalardır. Böylece Deniz'in bir ay için belirlediği vitamin ihtiyacını karşılayabilmesi için *M* ve *N* ürünlerinden toplam en az kaçar kutu alması gerektiğini bu 3 noktaya bakarak saptayabiliriz. Bu noktaların bileşenlerini topladığımızda istediğimiz koşullara uyan *x*+*y*'nin alabileceği en küçük üç değeri bulmuş oluruz: 30, 35, 50. Elbette, bu sayılar içinde 30, bizim aradığımız sayı olacaktır, yani *M* ürününden hiç almayıp, sadece *N* ürününden 30 paket almak en düşük maliyeti veren sonuçtur.

Yukarıda en iyi çözümü veren *A*(0, 30) noktasını matematiksel yolla da bulabiliriz. Cem Uran'ın önerdiği bu yöntemde *k* tamsayı olmak üzere $x+y = k$ doğrularıyla, grafikte olası çözümlerin gösterildiği taralı bölgenin kesişimine bakmalıyız. Bu durumda $x+y = k$ doğrularının taralı bölgeyle kesişimini sağlayan en küçük *k* değeri 30 oluyor, yani $x+y = 30$ doğrusu taralı bölgeyle *A*(0, 30) noktasında kesişiyor.

Problemin en iyi çözümü, tabii ki maliyete bağlıdır. Biz, yukarıda her iki ürünün de bir paketinin fiyatını aynı kabul ederek

10 TL olarak belirlemiştik. Eğer, *M* ürünün bir paketinin fiyatını 5 TL'ye düşürür, *N* ürününse 15 TL'ye çıkarırsak, *A*(0,30), *B*(20,15), *C*(50,0) uç noktalarına göre yeni maliyetler sırasıyla 450 TL, 325 TL, 250 TL olur. Bu durumda Deniz için en iyi çözüm 250 TL'ye karşılık gelen sadece *M* ürününden 50 paket almaktır.

Bu problemde oldukça basit bir şekilde iki ürün iki değişkene bağlı olarak ele alındı. Günümüzde binlerce değişken içeren Doğrusal Programlama problemleri çözülüyor. Henüz bilgisayarların icat edilmediği 1940'larda 9 vitamin ihtiyacı için 77 değişkeni olan bir beslenme problemini çözmek, elle hesap yapan 10 kişilik bir ekibin 12 gününü alıyormuş. Günümüzün bilgisayarları böylesi hesapları Doğrusal Programlama modeli sayesinde göz açıp kapama süresi içinde yapılabiliyor. Bu yazıda ele aldığımız "beslenme problemi"nin çözümünde kullandığımız yöntem, denklem ve maliyet sorunlarının çözümünde kullanılan Excel gibi bilgisayar programlarının çalışma mantığını oluşturuyormuş. Doğrusal Programlamanın babası olarak kabul edilen Amerikalı matematikçi Dantzig, 1950'lerde 70 kişinin 70 farklı göreve en uygun bir biçimde atanmasıyla ilgili yüzlerce değişkene sahip bir problem geliştirmiş. O dönemde çözümü oldukça zaman alan böylesi problemler, günümüzde Dantzig'in geliştirdiği Simpleks Algoritmasının bilgisayarlara uygulanmasıyla saniyeden daha az bir sürede çözülebiliyor.

Bankacılık, eğitim gibi birçok sektörde uygulaması olan Doğrusal Programlama yöntemi, üretim tekniklerinin seçiminde, maliyet ve masrafların düşürülmesinde, insan ve makine kaynaklarının en iyi şekilde tahsis edilmelerinde, kıt kaynakların etkin kullanımında, yiyecek maddelerinin harmanlanmasında, envanter kontrolünde, elektrik ve diğer enerjilerin toptan fiyatlandırılmasında etkin olarak kullanılan bir teknik.

Doğrusal Programlama matematiksel modelinin böylesine geniş bir uygulama alanı olduğunu öğrendiğimde, öğrencim Deniz'in ne kadar önemli bir çalışma yaptığını daha iyi anlamıştım. O, maalesef, ek beslenme programını düzenli olarak uygulamasına ve çok çalışmasına rağmen hayalindeki madalyayı

kazanamamıştı. Ama bana göre "beslenmenin matematiği" çalışmasıyla en az altın madalya değerinde bir ödülü haketmişti.

Not: Bu yazı, Tony Crilly'in *50 Mathematical Ideas* adlı kitabındaki "The diet problem" başlıklı makaleden esinlenerek yazılmıştır.

DÜNYAYI DEĞİŞTİREN DERS

Bu yazıda, 19. yüzyılda yaşamış ünlü Alman matematikçi Bernhard Riemann'ın verdiği bir dersi konu edineceğiz. Bilim tarihinin kilometre taşlarından biri olarak kabul edilen bu konuşmanın ilginç öyküsüyle başlayalım yazımıza.

Yıl 1854. Bernhard Riemann, 28 yaşında genç bir akademisyen. Doçent olmayı arzulamaktadır. Doçentlik tezi üzerinde 30 ay çalışmıştır. Son aşamada jüri önünde ders vermesi gerekir. Jüri, onun belirleyeceği üç konudan birini seçecek ve ondan anlatmasını isteyecektir. Jüri başkanı Carl Friedrich Gauss'tur. Gauss, daha o devirde Avrupa'da efsane olmuş bir matematikçidir. Genç akademisyen Riemann çocukluktan beri bir toplulukta konuşmaktan kaçınan, çekingen bir yapıya sahiptir. Ders gününün korkusunu hissederek konu seçimini yapar, jüriye teslim eder. Seçtiği konulardan ikisi elektrik, biri geometri üzerinedir. Elektrikle ilgili konulara daha çok çalışmıştır; çünkü Gauss'un yıllardır fizikçi Wilhelm Weber'le bu konular üzerine tartıştığını biliyordur. Gauss'un ondan elektrikle ilgili bölümlerden birini anlatmasını isteyeceğini tahmin etmektedir. Bu yüzden geometri üzerine daha az çalışır ve bu konuda kendini hazır hissetmiyordur.

Jüriden çıkan karar Riemann için tam bir hayal kırıklığıdır. Jüri, Gauss'un önerisiyle genç matematikçiden "Geometrinin Temelinde Yatan Varsayımlar Üzerine" başlıklı tez çalışmasını

anlatmasını istemiştir. Genç matematikçi yanılmıştır; çünkü bilmediği bir şey vardır: Gauss, hayatı boyunca bu konu üzerine düşünmüştür ve bu kadar genç bir kimse tarafından bu kadar zor bir konunun nasıl inceleneceğini merak ediyordur.

Riemann şaşırmıştır, üzüntülüdür, karamsardır. Çalışmalarındaki fizikle ilgili bölümlere o denli yoğunlaşmıştır ki dersin konusunun "geometri" olduğunu öğrendikten sonra bile tutkuyla bir süre daha elektrikle ilgili araştırmalarından kendini alamamıştır. Ama kısa bir süre sonra toparlanıp "Geometrinin Temelinde Yatan Varsayımlar Üzerine" başlıklı çalışmasını yedi haftada tekrar ele alarak tamamlar ve artık beklenen gün gelmiştir. 1854'ün 10 Haziran'ında Gauss ve jüri üyelerinin karşısındadır. Heyecanla, çekinerek başlamış olduğu konuşması bittiğinde, salon sessizliğe bürünmüştür, anlatılanlardan jüri başkanı dışında kimse pek bir şey anlayamamıştır. Riemann'ın düşüncelerindeki derinliği gören Gauss, şaşkınlık ve hayranlık içindedir. Bu konuşma onun beklentilerinin çok üstündedir. Riemann'ı dinledikten hemen sonra fakültede katıldığı bir toplantıda, bir kimseyi kolay kolay övmeyen Gauss, Wilhelm Weber'e Riemann'ın sunumunu "Verimli, mükemmel, yüce bir yaratıcılık" sözleriyle anlatmıştır.

Matematik tarihinin çizdiği yoldan ilerleyip Riemann'a ulaşmaya çalışan bir kişi ilk olarak, yukarıda kısaca hikâyesini anlattığımız "Riemann geometrisi" adıyla bilinen kuramla karşılaşacaktır. Onun 1854'te ortaya koydukları 60 yıl sonra bile tam olarak anlaşılamamış, sonrasında Genel Görelilik Teorisi'ni mükemmel bir şekilde haklı çıkarmıştır. Bu tarihi ders, sadece matematikte değil, fizik ve evren bilim dallarında da devrim niteliğinde sonuçlara yol açmıştır. Albert Einstein, "Riemann'ın bu çalışmasından haberim olmasaydı görelilik kuramını hiçbir zaman geliştiremeyecektim." sözünü söylemiştir.

Riemann'ın 1854'te vermiş olduğu bu ders, bilim tarihinin dönüm noktalarından biri olarak kabul edilir. Bu tarihi konuşmayı şair, yazar Tarık Günersel kurgulayarak şöyle anlatmıştır:

"Genç matematikçi sunumu bitirirken profesörler kahkahayla alay ediyordu.'Böyle geometri olur mu?' Riemann, onlara

aldırmadan, Gauss'a baktı. Koltuğu boştu. Demin çıkmıştı demek. Peşinden koştu. Koridor. Gece. Dahi matematikçi yıldızlara bakıyor. 'Nasıl buldunuz, üstat?' 'Benim devir kapandı. Ona üzülüyorum. Yeni bir çağ başladı.' Kırk yaşında öldü Riemann, 1866'da. Katkıları Einstein'a görecelik teorisinde matematik imkânı sağladı."

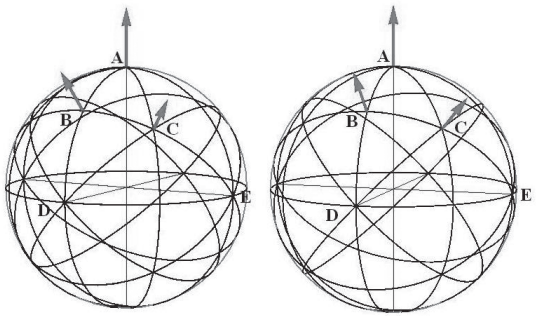
Riemann, keşfettiği "geometriyi" iki bölümde inceler. Birinci bölümde *n* boyutlu uzayı tanımlayarak günümüzde **Riemann uzayı** olarak bilinen kuramı açıklar. İkinci bölümde ise üzerinde yaşadığımız dünya ile geometri arasındaki ilişki üzerine derin sorular sorar. Gerçek (evrenin) uzayın boyutunun ne olduğunu, hangi geometrinin bu uzayı tanımladığını sorgular ve bu konuşmadan 60 yıl sonra Albert Einstein'ın evrenin geometrisi dediği **Riemann geometrisinin** temellerini açıklar.

Öklit geometrisi küçük ölçekteki bir uzayın iyi bir betimlemesidir, yeryüzündeki ölçümlerde doğrulanır, ama daha büyük, örneğin galaksiler arası ölçekte geçerli değildir; hatta aynı enlemde bulunan iki şehir arasındaki en kısa mesafeyi bile Öklit geometrisiyle doğru olarak hesaplayamayız. Stephen Hawking, *A Brief History of Time* isimli kitabında şu örneğe yer verir: New York ile Madrid neredeyse aynı enlemdedir. Bu şehirlerarasındaki en kısa mesafe ne kadardır? Öklit geometrisine göre harita üzerinde düz bir çizgi çizerek, New York'tan doğuya doğru bu çizgi üzerinden giderek 3.707 mil sonra Madrid'e ulaşırsınız. Oysa bir çember boyunca önce kuzeydoğu, daha sonra yavaş yavaş doğu ve daha sonra da güney doğu rotasını izlerseniz 3.605 mil sonra Madrid'e ulaşırsınız. Bu iki güzergâh arasındaki mesafe farkı dünyanın eğriliğinden kaynaklanır ve Öklit-dışı geometrinin doğruluğunu işaret eder. Bu yüzden uçakların rotası bu büyük daireler üzerinden belirlenir.

Hawking'in sözünü ettiği Öklit-dışı geometri Riemann'ın o tarihi derste anlattığı geometridir. Bu geometride, Öklit geometrisinde olduğu gibi iki nokta arasındaki en kısa uzaklık doğru parçası değil, bir eğridir, doğruların yerini çemberler alır. Bu çemberler bir küre yüzeyinde bulunurlar ve küreyle aynı merkeze sahiptirler. Dolayısıyla Öklit geometrisindeki "Bir doğru

parçası her iki ucundan sonsuza dek uzatılabilir" aksiyomu yerine "Bir eğri sınırsızdır ama sonsuz değildir" önermesi geçer. İşte, Riemann tam da bu noktada keşfettiği geometriyle evrenin biçimi arasında ilişki kurmaya çalışır. Tıpkı kürenin üzerine çizeceğimiz büyük bir çemberin sınırının olmayıp sonlu olması gibi evrenin de sonlu ama sınırsız olabileceği fikrini ortaya atar. Evreni "düz" olarak düşünmedeki yanılgının küçük ölçek için doğru olanın büyük ölçeğe de uygulanmasından kaynaklandığını savunur. Tıpkı bin yıl önce dünyanın düz olduğuna inanılması gibi.

Ünlü Alman fizikçi Max Born, Riemann'ın küresel uzay tasarımı için şu sözleri söylemiştir: "Bu sonlu ama sınırsız uzay fikri, dünyanın ne olduğu konusunda aklın ürettiği en önemli kavramlardan biridir."



Riemann, jüri üyelerinin pek bir şey anlamadığı o tarihi konuşmasında "küresel uzay" fikrini ortaya atarak, uzayın bir eğriliğe sahip olduğunu ve bu eğriliğin nasıl hesaplanacağını açıklamıştır. Uzayın eğriliğinin, dünyada yapacağımız ölçümlerle uzaydaki ölçümler arasında farklı sonuçlara yol açacağını öne sürmüştür. Onun bu düşüncesini basit bir örnekle şöyle açıklayabiliriz: Kuzey Kutbu'nda aralarında *d* km mesafe bulunan iki balonun bulunduğunu düşünelim. Bu balonları aynı anda yukarı doğru (kuzey yönünde) uzaya gönderdiğimizi varsayalım. Balonların yolculuklarının herhangi bir anında aralarındaki uzaklığı ölçtüğümüzü hayal edelim. Eğer bu uzaklık *d* km ise o zaman uzay Öklityendir ve eğriliği sıfırdır. Ama Riemann'ın görüşüne göre uzayın

Öklityen olduğunu bilemeyiz. Bu mesafe Riemann geometrisine göre *d* km'den daha küçüktür. Tıpkı New York-Madrid arasındaki uzaklık gibi. İşte, tam da bu yüzden, Albert Einstein, Riemann geometrisine evrenin geometrisi demiştir.

Riemann, matematikçilerin prensi olarak görülen Gauss'un hayranlıkla izlemiş olduğu o derste altmış yıl sonrasına, Minkowski'ye, Einstein'a birer mektup göndermiştir adeta. Onun tam hazırlanamadan (!) anlatmış olduğu bu ders, günümüzde modern evrenbilimin doğuşu olarak kabul edilir.

Riemann, 1866'da kırkıncı doğum gününü kutlayamadan hayata veda etmiştir. Ömrünün son yılında yayımladığı makaleyle elektrik, manyetizma, ışık ve kütle çekimi olayları arasındaki bağlantının kurulabileceği matematiksel bir model için çalışmıştır. İlginçtir ki Albert Einstein da Riemann'dan yarım yüzyıldan fazla bir süre sonra ömrünün son yıllarını böyle bir model aramakla geçirdiği için alay konusu olmuştur.

KAYNAKLAR

1) Bell, E, *Men of Mathematics*, Simon&Schuster, 1986.

2) Hawking, S, *A Brief History of Time,* Bantam Books, 1998.

3) Osserman, R, *Evrenin Şiiri*, Çev. İsmet Birkan, TÜBİTAK, 2000.

PAUL ERDÖS ya da MATEMATİK YAPMANIN AŞKINLIĞI

Paul Erdös efsanevi bir matematikçiydi. Ondaki matematik aşkı o kadar marazi ve o kadar büyüktü ki, "Matematik dışında, iyi ya da kötü tüm insan aktiviteleri sona ermelidir." sözünü söylemiş ve bu sözdeki ironi onun için hayat felsefesi olmuştur. "Başka şehirler, başka kadınlar değil, başka bir çatı, başka bir kanıt." diyerek yirmi beşten fazla ülkede matematik yapmış, hayatını evsiz ve "işsiz" bir matematik gezgini olarak yaşamıştır. Günde on dokuz saat çalışmış, zorunlu ihtiyaçlarının dışında matematiksiz geçen bir zamanı olmamıştır. Dünyevi zevklerden uzak durmuş, hiç evlenmemiştir. Arkadaşlarına göre, ömrünün son kırk beş yılında hiç sinemaya gitmemiş, matematiksel bilim kurgu türünde yazılmış olan E. Abbott'ın Düzülke'sinden başka bir roman okumamıştır.

Erdös, ciddi sağlık sorunlarının bile matematiğin önüne geçmesine izin vermemiştir. Göz ameliyatı olması gerektiğinde ameliyatın başlayabilmesi, matematik hakkında konuşabileceği bir matematikçinin Memphis Üniversitesi'den çağrılmasıyla mümkün olabilmiştir. Bu olaydan sonra arkadaşları onunla " Kondüktörle beraber bir problem çözmeden treni kaldırmazsın" diye şakalaşmışlardır. Ölümle karşılaşması bile matematik yaparken olmuştur. 1996'da seksen üç yaşındayken, Varşova'da katıldığı bir

konferansta bildirilerini sunduktan hemen sonra, bir problemle uğraşırken "adeta elinde kılıcıyla" yaşamını yitirmiştir.

Paul Erdös maddi mülkiyeti reddeder. Sahip olduğu tek mülk matematik defterleridir. "Özel mülkiyet başa beladır." diyerek maaşlarının ve ödüllerden kazandıklarının büyük bir bölümünü ya burslara dönüştürmüş ya da yoksullara vermiştir. 1983'te Wolf Ödülü'nü alarak kazandığı 50.000 dolardan kendisine yalnızca 750 dolar ayırmış, kalanını anne babasının adlarına verdiği burslarla öğrencilere dağıtmıştır. İki kez davet edildiği Hindistan'da verdiği konferanslardan aldığı ücreti ise hiç karşılaşmadığı bir kadına, Hintli dahi matematikçi S. Ramanujan'ın dul eşine, göndermiştir.

Sayılar teorisi, kompleks analiz, kombinatoriks, olasılık, geometri, çizge teorisi, kümeler teorisi gibi çeşitli alanlarda çalışmalar yapan Erdös'ün en büyük tutkusu soyut matematikle ilgili yeni problemler üretmek ve onları çözmektir. Onun için, problemin çözülmüş olması önemlidir, kimin tarafından çözüldüğü değil. Çok kişiyle işbirliği yapmanın çözümü hızlandıracağını savunmuştur. Varsayımlarını bile paylaşarak, matematikçiler arasında yüzyıllardır var olan "öncelik çatışmalarını" umursamamıştır. 1500'e yakın akademik çalışmanın birçoğunu yüzlerce matematikçiyle işbirliği yaparak yazmıştır. Erdös'ün bu çabaları ilginç bir geleneğe dönüşmüş, matematikçiler kendilerini *Erdös sayısı* ile nitelemeye başlamışlardır. Erdös ile birlikte makale yazmış matematikçilerin *Erdös sayısı* 1, *Erdös sayısı* 1 olanlarla makale yayımlamışların *Erdös sayısı* 2, *Erdös sayısı* 2 olanlarla yayın yapanlarınsa *Erdös sayısı* 3' tür ve bu sayılar böyle sürüp gider.

Problemler ve ödüller

Erdös, "sosyal matematikçi"dir. Ürettiği veya çözemediği problemleri sohbetlerde, yemeklerde, derslerde, yazılarında meslektaşları ve öğrencileriyle paylaşmıştır. Matematik yapmayı, problem çözmeyi özendirme yöntemi de oldukça kayda değerdir. Problemlerin çözümü için 10 dolardan 10.000 dolara kadar para ödenmesi şeklinde bir ödüllendirme sistemi geliştirmiştir. Mesleğinin ilk yıllarında 10, 20, 100 dolarlık ufak para ödülleri vererek hem problem çözmeyi teşvik etmiş, hem de problemlerin zorluk dere-

cesini ölçmeye çalışmıştır. İlk parasal ödülünü kümeler kuramında bir problemi çözen bir meslektaşına 20 dolar olarak ödemiştir. Bazı matematikçiler ise Erdös'ün ödül sistemi sayesinde beklenmedik kazançlar elde etmişlerdir. Bu matematikçilerden biri de Helmut Maier'dir. Amerikalı matematikçi Carl Pomerance'ın bu konuyla ilgili aktardığı anekdot oldukça ilginçtir: "Helmut Maier, Erdös'e yeni kanıtladığı bir teoremden söz eder. Erdös, 'Belki bunun için de bir ödül koymuş olabilirim.' karşılığını verir. Hemen bir kütüphaneye giderler. Erdös'ün gerçekten de, bir matematik dergisinde o problem için 100 dolar ödül koyduğu ortaya çıkar ve Erdös ödemeyi hemen orada yapar."

Erdös, kariyeri boyunca yetenekli genç matematikçileri araştırmış ve onları problemlerin çözümü konusunda cesaretlendirmiştir. Umut veren genç matematikçilerle verdiği ödüller için sözleşmeler imzalamıştır. Problemleri çözenlere ödüller Erdös'ün onayıyla Amerika'daki arkadaşı Bell Laboratuvarı'nın yöneticisi, Ron Graham tarafından verilmiştir. Graham, Erdös'ün hayatının son yirmi beş yılının hamiliğini yapmış, para ve bankalardan bağımsız yaşayan arkadaşının mali işlerinin tümünü yönetmiştir. Ödüller, problemleri çözen matematikçilere Erdös ve Graham imzalı çeklerle dağıtılmıştır. Zaman zaman çeklerle dağıtılacak paraların kaynağı konusunda sorunlar yaşanmış, ama Graham, bu sorunların çözümü için ilginç bir yöntem keşfetmiştir: çerçevelenmek üzere hazırlanmış çekler. Paraya çevrilme olasılığı olan çekleri kendisi imzalamış, anı olarak saklayacağını düşündüğü matematikçilere ise çekleri Erdös'ün imzasıyla vermiştir. Ödül kazanan birçok matematikçi çekleri bozdurmayıp çalışma odalarına asarken, bazı matematikçiler Graham'ı yanıltarak çekleri paraya çevirmişlerdir. Bunlardan biri de California Üniversitesi'nde doktora sonrası çalışmalarını yapmakta olan bir matematikçidir. Erdös'ün kesirlerle ilgili 750 dolarlık bir problemini çözmüş ve bir toplantı sırasında ödülünü Graham'dan almıştır, ama o dönemde para sıkıntısı çektiğinden ve aldığı çekin yalnızca çerçeveletilip asılacağından habersiz olduğu için gidip çeki bozdurmuştur. 1999'da Erdös'ün ölümünden sonra yapılan bu ödeme için Graham, bankanın bu çeki kabul etmiş olmasına çok şaşırdığını dile getirmiştir.

Çözümünü bilmediğiniz bir problemin güçlük derecesini belirlemek kolay değildir. Graham, Erdös'ün matematiğin herhangi bir alanında var olanlardan daha üst düzeyde problemler oluşturmada doğuştan gelen, inanılmaz bir yeteneğinin olduğunu söylemiştir. Erdös, bu yeteneği ve birikimi sayesinde problemlerin zorluk derecesine göre ödül belirlemede çok başarılı olmuştur. Yüksek miktarda para ödülü koyduğu problemlerin çoğu çözülememiştir. Bu sorulardan biri de sayılar kuramında önemli sonuçlar doğuracağına kesin gözüyle bakılan 3000 dolar ödüllü bir sayı problemidir: Tamsayılar kümesindeki elemanların çarpımsal terslerinin sonsuza gitmesi durumunda, herhangi bir uzunlukta bir aritmetik dizinin var olduğunun kanıtlanması. Şimdiye dek bütün çabalara direnen bu savın kanıtlanması sayı teorisyenleri için önemlidir: çünkü bu kanıt, asal sayılardan oluşan herhangi bir uzunluktaki aritmetik dizilerin var olduğunun genel bir kanıtını da kapsayacaktır.

Erdös'ün en sevdiği matematiğe giriş sorularından biri

Erdös'ün ödüllü sorularıyla uğraşmayı matematikçilere bırakarak, onun en sevdiği matematiğe giriş sorularından birini ele alalım. Ama önce, Erdös'ün daha basit bir savıyla başlayalım:

Sav. *$2n$ elemanlı $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ kümesinin elemanlarından seçilen $n + 1$ sayı içinde aralarında asal iki sayı vardır.*

Erdös bu soruyu 1959'da bir öğle yemeği sırasında on iki yaşındaki Louis Pósa'ya sormuş. Pósa çorbasını bitirdiğinde "bu ikisi komşu" yanıtını vermiştir. Bu yanıt, çözümün kısa açıklamasıdır; çünkü A kümesinde ardışık n tane tek, ardışık n tane de çift sayı bulunduğundan seçilen $n+1$ sayının içinde en az iki sayı ardışık olacağından bu iki sayı aralarında asaldır. Erdös, Pósa'nın soruyu çözmüş olmasından çok etkilenmiş ve daha sonra onunla özel olarak ilgilenmiştir. Pósa ve Erdös ilk ortak makalelerini Pósa henüz on dört yaşındayken yazmışlardır.

Graham, Erdös'ün aşkın özelliklerinden birini şöyle açıklar: "Matematikte ne zaman yeni bir teorem kanıtlarsanız, her zaman

kanıtlanmayı bekleyen başka bir varsayım vardır. Erdös, asla sizin bir kanıtın şanıyla kalmanıza izin vermezdi. Sizi hep bir sonraki varsayıma doğru yönlendirirdi." Erdös, Louis Pósa'ya da ilk sorunun hemen ardından ikincisini yöneltir, ve aşağıdaki savı kanıtlamasını ister. Yemek bittiğinde Pósa'nın yanıtı hazırdır. Bu problem Erdös'ün en sevdiği matematiğe giriş sorularından biridir.

Sav: *2n elemanlı, A = {1, 2, 3, ..., 2n} kümesinin n+1 elemanlı bir altkümesi B ise, B kümesinde en az öyle iki sayı vardır ki bu sayılardan biri diğerini tam böler.*

Kanıt. *m* tek sayısı 1 ile $2n-1$ arasında ve *k* doğal sayı olmak üzere *B* kümesinin her elemanını $2^k.m$ biçiminde yazabiliriz. Buradaki *m*'ye *B* kümesindeki sayıların tek kısmı adını verelim. Biz, *B* kümesinin eleman sayısının $n+1$ olduğunu ve bu sayıların tek kısımlarının *A* kümesinde bulunduğunu biliyoruz. Öte yandan *A* kümesinde *n* adet tek sayı var. *B* kümesindeki $n+1$ sayının tek kısımlarına gelecek sayılar, *A* kümesindeki *n* adet tek sayının bazılarından veya en çok *n* tanesinden oluşmak zorunda olduğundan *B*'deki sayılardan en az ikisinin tek kısmı aynıdır, yani bu iki sayıdan biri diğerinin katıdır.

Kuşkusuz ki yukarıda sorulan oldukça basit iki soru Erdös'ün matematiğini anlatmakta çok yetersiz kalır. Ama bu soruların öyküsü bizim Erdös'ü daha iyi tanımamızı, ayrıca on iki yaşındaki bir çocukla yemekte tartışan birinin matematik yaparkenki aşkınlığını ve "Matematik dışında, iyi ya da kötü tüm insan aktiviteleri sona ermelidir." sözünün izdüşümündeki "matematik hastalığını" biraz olsun anlamamızı sağlıyor.

KAYNAKLAR

1) Hoffman, P, *Yalnızca Sayıları Seven Adam*, Çev. D. Kömürcü, Sistem Yayıncılık, 1999
2) Halasz, G., Lovasz, L., Simonivits, M., Sos, V. T. (Eds.) *Paul Erdös and His Mathemathics*, Springer, 2002
3) Pickover, C. A. *Sayıların Büyüsü*, Çev. B. Kaptanoğlu, Güncel Yayıncılık, 2003
4) Törün, A, Bir Ömür Matematik: Paul Erdös, *Matematik Dünyası*, 2008 -I
5) Aiger, M, Ziegler, G, *Kitap'tan Deliller*, Çev. M. Uludağ, İstanbul Bilgi Üniversitesi Yayınları, 2009

2. Bölüm

Edebiyattaki Matematik

MATEMATİĞİN EDEBİYATTAKİ İZLERİ

Kalbini hem edebiyata hem de matematiğe kaptırmış birisi olarak, bir romanda, bir şiirde matematiksel nesneler veya önermelerle karşılaştığımda çok sevinir, çok heyecanlanırım. Tıpkı, çıktığınız güzel bir yolculukta çok sevdiğiniz bir arkadaşınızla tesadüfen karşılaşmanın hoş sürprizi gibi. Bu duyguyu en yoğun olarak Dostoyevski'nin *Karamazov Kardeşler*'ini okurken yaşadım. İvan Karamazov ile kardeşi Alyoşa arasındaki diyalogda sayfalarca Öklid geometrisi sorgulanır. Nefesimi tutarak okuduğumu anımsıyorum. Matematik tarihinin en sarsıcı keşiflerinden biri olan Öklid-dışı geometrilerin romanda ustaca kullanılmasına hayran kalmıştım. Benzer bir heyecanı Oğuz Atay'ın *Tutunamayanlar*'ını okurken de hissettim. Özellikle romanın ilk bölümlerinde yer alan, "Sinüsün entegralini nasıl alınacağını unuttum; mahcup oldum sinüse gösterdiğim bu ihmalden" , "ben matematik yiyerek yaşıyorum" gibi onlarca cümleyi keyifle okudum. Böylesi metinler karşısında edebiyatsever bir matematikseverin heyecan duymaması olanaksızdır sanırım.

Tutunamayanlar'da Turgut, Selim'i soyutlama gücünden yoksun olmakla suçlar ve şöyle söyler: "(…) Sen ve senin gibiler, ancak beş elmayla on elmayı toplayabilen basit insanlarsınız. Elle

tutulan şeylerle düşünebilir, elle tutulan şeyleri sevebilirsiniz yalnız. Siz *A* ve *B*'den değil, üç erkek ve beş kadından anlarsınız ancak." Edebiyatı kullanarak matematiğin soyut yapısını vurgulayan basit ama çarpıcı cümleler…

Yazarlar, roman, hikâye ve şiirlerde matematiği değişik şekillerde kullanmışlardır. Dostoyevski, Oğuz Atay, Edgar Allan Poe, Umberto Eco, George Orwell, Turgut Uyar, İlhan Berk gibi birçok yazar ve şair ele aldıkları konuyu aydınlatmak için matematikten yararlanmışlardır. Adwin A. Abbott, Denis Guedj, Rudy Rucker, Apostolos Doxiadis gibi yazarlar da Pisagor Teoremi, Goldbach Sanısı gibi matematiğin kuram ve önermelerinden ilham alarak eserlerini yaratmışlardır.

Biz bu yazıda yukarıda ilk grupta saydığımız yazarların eserlerinden bazı alıntılar yapmak istiyoruz. Aşağıdaki metinler bize, edebiyat aracılığıyla matematiğin etkisinin ne kadar geniş olduğunu, matematikte tanımlardan, teoremlerden, formüllerden çok daha fazlasının bulunduğunu anlatıyor, matematiğin içinden edebiyata ve edebiyatın içinden matematiğe bakma fırsatını veriyor.

Edebiyatımızın kült romanı *Tutunamayanlar*'ın ilk yarısının bazı bölümlerinde roman karakterleri Turgut Özben ve Süleyman Kargı matematiksel nesnelere ve matematik tarihine göndermeler yaparak konuşurlar. Bu bölümlerde, matematiğin insanlık tarihindeki önemi vurgulanır. Turgut, matematiğe tutkulu, "pozitivizmin" etkisinde bir inşaat mühendisidir. Selim'i sadece "yalın düşüncelere alışık olmakla" eleştirir ve "Hayatın Koordinatları" adını verdiği keşfini şöyle duyurur :

> "Evet bu nazariyeyi ben buldum! Değil seni, Gauss'u bile kıskandıracak, Leibniz'i ümitsizlikten intihara sürükleyecek bir ilim-hayal buldum. Minimini bir *x* ile canım bir *y* arasında başlayan bu…"

Hayatın Koordinatları, kartezyen koordinat sisteminden esinlenilmiş matematiksel bir bilimkurguyu çağrıştırır. Bu bölüm, matematiği kullanarak "pozitivizmin" ironik bir eleştirisi olarak da görülebilir.

> "Hayatın Koordinatları deyiminden kısaca şunu anlıyoruz: Bir insanın, belirli bir zamanda, belirli bir yerde ve belirli

> şartlar altında ne yapmış olduğunu bilirsek, bu bilinenlerle, yani hareket ve zaman boyutlarının önceden tesbidiyle, bu verilere dayanarak yazılan ve sabit katsayıları, o insanın tayin edilmiş özellikleriyle belirlenen denklemlerin, zaman değişkenine göre çizilen eğrileri, bize o insanın ileride ne gibi şartlar altında ne yapacağını gösterir. Şimdiye kadar yaptığım incelemeler, dokuz bilinmeyenli, yani dokuz eksenli bir sistemde bir insanın bütün hayatının denkleminin yazılabileceği ve buna istinaden de, hayatın koordinatları metoduyla varlığının ifade edilebileceği merkezindedir. Böylece, insan hayatına ait bütün meselelerin önceden, yani yaşanmadan, çözülebilmesi imkan dahiline giriyor. (…) Bunun için de, kanaatimce, önce insanlara ait bütün bilgileri, cebrik notasyonlarla gösterecek bir sistem bulmalıyız. İnsanın, biyolojik, psikolojik ve sosyolojik durumlarını bunlara uygun cebirsel işaretlerle ifade ederek, bütün hayatı, kelimeler yerine, sayısal değerlere tekabül eden genel notasyonlarla gösterirsek, gramatik kombinezonlar yerine transandantal eşitlikler ikame etmiş oluruz ki bu yeni sistemde, sizin bilinen faktörler dediğiniz sabit katsayılar da herhalde yerini bulur."(2)

Oğuz Atay, *Bir Bilim Adamının Romanı* adlı kitabında da sık sık matematik ve matematikçilerden söz eder. Hocası Mustafa İnan'ın yaşam öyküsünü anlattığı kitapta, eğitim sistemimizin matematik öğretimi üzerinden Mustafa İnan'ın sözleriyle eleştirisine yer vermiştir:

> "(…) Formüllerin gerisindeki matematikçiyi, onun nasıl düşündüğünü sezmek gerekiyor.(…) Matematiği bir takım uzun ve yorucu işlemlerden ibaret gördüğünüz için de bilim çekici gelmiyor size. Sayıların ve Eski Yunanca harflerin gerisinde canlı ilişkiler olduğunu sezemezseniz, sayılarla hayatın arasındaki ilişkiyi göremezseniz, matematik ve dolayısıyla fizik çalışmanın tek amacı sınıf geçmek olur." (3)

Dostoyevski'nin *Karamazov Kardeşler* adlı romanında ağabey İvan Karamazov'la kardeşi Alyoşa arasında Tanrı'nın varlığı üzerine çarpıcı bir diyalog vardır. İvan, nihilist düşüncelere sahip, iyi bir eğitim almış, rasyonalizm savunucusu, modernizmi temsil eden, kurnaz, zeki bir entelektüeldir. Aklının Öklid prensipleri-

ne göre çalıştığını ve her şeyin bu prensiplerle açıklanabileceğini savunur, ama Öklid-dışı geometrilerin keşfi kafasını karıştırır; çünkü o çağda bu keşif birçok modernist için gerçek bir kriz olarak görülür. Tek doğru geometri olarak kabul edilen Öklid geometrisinden farklı, tutarlı bir geometrinin olabileceğine birçok filozof ve matematikçi gibi İvan da karşı çıkar:

> "Eğer Tanrı gerçekten var ise ve dünyayı yaratmışsa, o halde hepimizin çok iyi bildiği gibi onu Öklid geometrisine göre, insan aklını da ancak üç boyutu kavrayabilecek şekilde yaratmıştır. Bu arada bazı geometri bilginleri ve filozoflar ortaya çıktı. Üstelik bunların arasında çok değerli olanları vardır. Bunlar tüm evrenin, hatta evreni de içine alan sonsuzluğun bile Öklid geometrisine göre yaratılmış olmasından şüphe ediyorlar. Hatta Öklid'e göre dünyada hiçbir şart altında kesişmeyen, kesişmeleri imkânsız olan iki paralel doğrunun belki de sonsuzluğun herhangi bir noktasında birleştiklerini, hayallerinden geçirmek cüretini gösteriyorlar." (4)

Edgar Allan Poe de matematiksever bir yazardır. Ünlü şiiri "Kuzgun"u yazma sürecini "bir matematik probleminde kesinliğe ve değişmez sonuca adım adım ulaşma" uğraşına benzetmiştir. *Altın Böcek* isimli öyküsünde matematiksel şifrelemeyle ilgili ilginç örnekler vermiş, *Hans Pfaall Diye Birinin Benzeri Görülmemiş Serüveni* adlı bilimkurgu türündeki öyküsünde ise Pfaall'ın icat ettiği balonla aya nasıl gidildiğini anlatmıştır. Pfaall, uzay boşluğunda yol alabilen özel bir balonla yaptığı yolculuğun yedi bin dokuz yüzüncü metresinde bazı hesaplar yapar:

> "(…) dünyanın yüzeyinin ne kadarlık bir kısmına baktığımı küresel geometriyle hesaplamak çok kolaydı. Bir kürenin herhangi bir kesitinin dış bükey yüzeyinin kürenin tüm yüzeyine oranı, kesitin sinüsünün kürenin çapına oranına eşittir. Şimdi, benim durumumda sinüs-yani altımdaki kesitin kalınlığı- yükseltime, ya da yüzeyin üstündeki bakış noktasının yükseltisine aşağı yukarı eşitti. Gördüğüm dünya yüzeyinin oranını "beş mile sekiz bin mil" olarak ifade etmek mümkündü. Bir başka deyişle yeryüzünün tüm yüzeyinin bin altı yüzde birine bakıyordum." (6)

Umberto Eco, *Gülün Adı* isimli romanında matematiği sadece bir bölümde kullanmıştır. Oldukça çarpıcı olduğuna inandığım bu bölümü aşağıda kısa bir alıntıyla paylaşmak isterim.

Bir manastırda işlenen cinayeti aydınlatmak için eski bir sorgucu olan rahip William ve yardımcısı Adso görevlendirilirler. Cinayetin ipuçlarını bulmak için manastırda çalışmaya başladıklarında bir yasakla karşılaşırlar: manastırın kitaplığına girmelerine izin verilmez. Kitaplık izinsiz girenlerin çıkamayıp yakalanması için labirent şeklinde yapılmıştır. Sekizgen, yedigen, kare gibi çokgen biçimindeki odalardan oluşan kitaplığın içine girmeden akıl yürütürler ve matematiği anahtar olarak kullanarak kitaplığın şemasını çıkarırlar. William bu iş için neden matematiği kullanmaları gerektiğini Adso'ya şöyle açıklar:

> "(…) Tamam Adso, matematik biliminden yararlanacağız. (…) Matematik kavramlar zihnimizin öyle bir biçimde kurduğu önermelerdir ki, ister bu kavramlar doğuştan var olsun, ister matematik bilimi öteki bilimlerden daha önce bulunmuş olsun, her zaman gerçekmiş gibi işlerler. Kitaplık da matematik biçimde düşünen bir insan zihni tarafından yapılmıştır; çünkü matematik olmadan labirent yapamazsın. Bu nedenle biz de matematik önermelerimizi, kitaplığı yapanın önermeleriyle karşılaştırmalıyız; bu karşılaştırmadan bilim üretilebilir, çünkü matematik, terimler üstüne terimler kurma bilimidir." (7)

Edebiyatta 2×2 veya 2+2

2×2 veya 2+2 söylemi birçok yazar tarafından kullanılmıştır. Bir görüş veya bir olgunun kabul ettirilmesi için gerekirse 2x2 = 5 olabilir. Roderik T. Long'a göre bu söylem ilk kez 1850'de Victor Hugo tarafından kullanılmış. Long, Fransız seçmenlerinin büyük çoğunluğunun Napoleon'u desteklediği gidişata dikkat çekerek Victor Hugo'nun şu sözlerini alıntılamıştır: "Şimdi 7 milyon 500 bin oyu al ve iki artı ikinin beş ettiğini kabul ettir, düz bir çizginin en uzun yol olması gibi, bütünün parçadan az olması gibi, bunları sekiz milyon, on milyon, yüz milyon oyla kabul ettir, bir adım bile ilerlemiş olmayacaksın."

Victor Hugo, bu sözleriyle "Çoğunluğun inandığı şey o şeyi doğru yapar mı?" sorusunu da kısmen yanıtlamış oluyor.

George Orwell, *1984* adlı romanında 2×2 = 5'i, Parti'nin dünya görüşünün insanlara dayatılma yöntemini anlatabilmek için kullanmıştır. Romanın başkahramanı Winston Smith, Parti'yi sorgular ve güncesine "Özgürlük, iki kere iki dört eder diyebilmektir" cümlesini yazar. Sonrasında sevgilisi tarafından ihbar edilir, işkence görür. İşkence sırasında da " Elimde değil, gözümle gördüğümü nasıl yadsırım? İki kere iki dört eder" diye tekrarlar. İşkencecisinin Winston'a verdiği yanıt ise şöyledir: "Bak Winston. Bazen iki kere iki beş eder. Hatta bazen üç eder. Bazen aynı anda hem beş, hem üç ettiği de olur. Daha fazla çaba göstermelisin. Aklı başında olmak kolay değildir."

Winston, romanın sonlarına doğru gördüğü işkenceler sonucunda aklını başına toplar! Parti'nin görüş ve sloganlarını kabullenir. Oturduğu masanın toz tabakasında parmağını gezdirerek 2×2 = 5 yazar.

Dostoyevski' nin *Yeraltından Notlar*'ındaki başkahraman için 2×2=5'in anlamı farklıdır. O, iki kere ikinin dört etmesini bir sonuç olarak görür, onun için 2×2 = 4 insanın ulaşacağı bir hedeftir. Oysa, onun görüşüne göre insan, hedefi değil, hedefe giden yolu sever. Hedefi elde etmek için harcanan çabanın yaşamın kendisi olduğunu savunur. Bu yüzden onun için 2×2 = 4 yaşam değil ölümün başlangıcıdır. Aslolan hayattır ve 2×2 = 5 hayata daha uygundur:

> "(…) İki kere iki dört, ellerini böğrüne dayayarak yolumuzu kesen, sağa sola tükürük atan bir külhanbeyin ta kendisidir. İki kere iki dördün yetkinliğine inanırım, ama en çok övülmeye değer bir şey varsa, o da iki kere ikinin beş etmesidir." (5)

Birçok şair de şiirlerinde matematiksel nesnelere yer vermiştir, hatta İlhan Berk'in *Çok Yaşasın Sayılar* isimli bir şiir kitabı vardır. Yazımızı Turgut Uyar'ın "Nedir Sonsuzdan Bir Önce" adlı şiirindeki "matematikten" bir örnek vererek bitirelim.

Belki de aşağıdaki dizeleri sonsuz kümeler kuramının babası Georg Cantor'a gönderilmiş bir mektup gibi okuyabiliriz; bir

şairin düşgücünün bir matematikçinin düşgücü kadar geniş olduğuna inanarak.

nedir sonsuzdan bir önceki sayının adı
diyelim sonsuz eksi bir
sonsuz eksi bir
hayatın adıdır bu

Turgut Uyar

KAYNAKLAR

1) http://math.unipa.it/~grim/SiLipsey.PDF
2) Atay, O., *Tutunamayanlar*, İletişim Yay., 2011, s. 72.
3) Atay, O., *Bir Bilim Adamının Romanı*, İletişim Yay., 1996, s. 70.
4) Dostoyevski, F. M., *Karamazov Kardeşler*, 2. Cilt, Çev. Leyla Soykut, Cem Yay., 1997, s.45.
5) Dostoyevski, F. M., *Yer Altından Notlar*, Çev. Mehmet Özgül, İletişim Yay., 2003, s.49.
6) Poe, E. A., *Bütün Hikayeleri*, Çev. Dost Körpe, İthaki Yay., 2002, s. 77.
7) Eco, U., *Gülün Adı*, Çev. Şadan Karadeniz, Can Yay., 2012, s. 306-307.
8) Orwell, G., *Bin Dokuz Yüz Seksen Dört*, Çev. Celal Üster, Can Yay., 2013.
9) Uyar, T., *Büyük Saat*, Yapı Kredi Yayınları, 2002.

İVAN KARAMAZOV ve BEŞİNCİ AKSİYOM

Dostoyevski'nin *Karamazov Kardeşler* adlı romanında ağabey İvan Karamazov'la kardeşi Alyoşa arasında Tanrı'nın varlığı üzerine çarpıcı bir diyalog vardır. İvan, nihilist düşüncelere sahip, iyi bir eğitim almış, rasyonalizm savunucusu, modernizmi temsil eden, kurnaz, zeki bir entelektüeldir. Alyoşa ise manastırda yaşayan, inancı sembolize eden ve kardeşler içinde en "hayırlı" olanıdır.

İvan, Tanrı'nın varlığını düpedüz ve yapmacıksız kabul ettiğini açıklar, ardından da insanların çektikleri acıları, kötülükleri sorgular, Alyoşa'ya şöyle seslenir: "Kabul edemediğim şey, Tanrı'nın kendisi değil, bunu anla! Ben, yalnız O'nun yarattığı Dünya'yı kabul edemiyorum, onu bir türlü benimsemeye razı olamıyorum."

İvan'a göre Tanrı hiçbir zaman sebepsiz ve aşırı kötülüğün oluşumuna izin vermemelidir. Onun mantığına göre, mükemmel, iyi, her şeyi bilen, her şeyden güçlü bir Tanrı'nın varlığı, bu kadar korkunç ıstırabın yaşandığı Dünya'nın varlığına aykırıdır. Bu yüzden var olduğuna inanmasına rağmen Tanrı'ya karşı koyar, sadece anlayabildiğine ve akla uygun olana boyun eğer.

İvan Karamazov, aklının Öklid prensiplerine göre çalıştığını ve her şeyin bu prensiplerle açıklanabileceğini savunur, ama Ök-

lid-dışı geometrilerin keşfi kafasını karıştırır; çünkü o çağda bu keşif birçok modernist için gerçek bir kriz olarak görülür. Tek doğru geometri olarak kabul edilen Öklid geometrisinden farklı, tutarlı bir geometrinin olabileceğine birçok filozof ve matematikçi gibi İvan da karşı çıkar:

> "Eğer Tanrı gerçekten var ise ve dünyayı yaratmışsa, o halde hepimizin çok iyi bildiği gibi onu Öklid geometrisine göre, insan aklını da ancak üç boyutu kavrayabilecek şekilde yaratmıştır. Bu arada bazı geometri bilginleri ve filozoflar ortaya çıktı. Üstelik bunların arasında çok değerli olanları vardır. Bunlar tüm evrenin, hatta evreni de içine alan sonsuzluğun bile Öklid geometrisine göre yaratılmış olmasından şüphe ediyorlar. Hatta Öklid'e göre dünyada hiçbir şart altında kesişmeyen, kesişmeleri imkânsız olan iki paralel doğrunun belki de sonsuzluğun herhangi bir noktasında birleştiklerini, hayallerinden geçirmek cüretini gösteriyorlar."

İvan Karamazov, "hiçbir şart altında kesişmeyen, kesişmeleri imkânsız olan iki paralel doğruyla", Öklid'in Beşinci Aksiyomu'nu (Paralellik Aksiyomu) anlatmak ister. Milattan önce 3. yüzyılda yaşamış olan Öklid, 13 ciltten oluşan *Elementler* adlı kitabında az sayıda tanımı (nokta, doğru vb.) ve beş aksiyomu[1] ("Tüm dik açılar eşittir", "herhangi iki noktadan bir doğru geçer" gibi doğruluğu kendiliğinden kabul edilen önermeler) temel alarak düzlem ve uzay geometriyi aksiyomatik yapıya kavuşturan ilk matematikçidir. Bilim tarihçileri Öklid'in ortaya koyduğu aksiyomatik sistemi, bilimsel düşünme yönteminin başlangıcı olarak kabul ederler. Matematikçiler yüzyıllarca Öklid'in ilk dört aksiyomunu "doğruluğu kendinden belli" önermeler olarak kabul etmişler, ama Beşinci Aksiyom'un doğruluğunun "aksiyom" denilecek kadar belli olmadığını düşünerek, bu önermenin aksiyomlar içerisinden çıkarılması gerektiğine inanmışlardır. Bu yüzden de ya bu önermenin yerine bir

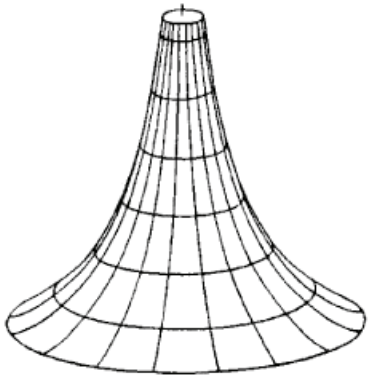
(1) Aslında Öklid, *Elementler*'de beş postulat ve beş aksiyom vermiştir. Bu yazıda postulatla aksiyom arasındaki fark dikkate alınmamıştır.

diğerinin koyulması gerektiğini savunmuşlar ya da bu önermeyi ilk dört aksiyomu kullanarak kanıtlamaya çalışmışlardır.

Beşinci Aksiyom'u, *Elementler*'de yazıldığı gibi anlatmak, bu yazının kapsamı bakımından zor olacağından, Öklid'in ifade ettiğine mantıksal açıdan denk olacak biçimde basitleştiriyorum: "Paralel olmayan doğrular kesişir ve kesişim noktası da doğruların birbirine yaklaştığı taraftadır." Bu aksiyomun farklı bir anlatımı ise şöyledir: "Bir doğru ve bu doğrunun üzerinde olmayan bir nokta verilmiş olsun; verilen noktadan verilen doğruya yalnızca tek bir paralel çizilir." Bu önermenin kanıtını yapabilmek için yaklaşık 2000 yıl boyunca birçok matematikçi çok uğraşmış ama başarılı olamamışlardır. Ünlü Macar matematikçi Bolyai'nin babasından aldığı mektuptaki şu satırlar, bu uğurda ne kadar çok emek harcandığının özeti gibidir: "Tanrı aşkına, şu Beşinci Aksiyom'la uğraşmaya bir son ver! Bundan en az tensel tutkulardan korktuğun kadar kork." Nihayet, 19. yüzyılın başlarında Öklid-dışı geometrilerin ortaya çıkmasıyla Beşinci Aksiyom'un diğerlerinin bir sonucu olmadığı anlaşılır, böylece Öklid 2000 yıl sonra tarih önünde haklı çıkar. Öklid-dışı geometrilerin keşfi matematikte devrimsel nitelikte sonuçlar doğurmuştur. Bu keşifte birçok matematikçi rol oynamıştır ama en önemlileri, Gauss (1777-1855), Lobachevsky (1792-1856), Bolyai (1802-1860) ve Riemann'dır. (1826-1866). Böylece iki tür Öklid-dışı geometri ortaya çıkar. Gauss, Lobachevsky ve Bolyai'nin bulduğu geometride bir noktadan bir doğruya sonsuz tane paralel doğru çizilebilir. Riemann'ın keşfettiği geometrideyse paralel doğrular olmadığından bir noktadan bir doğruya paralel doğru çizilemez.

İvan Karamazov'un söz ettiği "bazı geometri bilginleri" yukarıda adı geçen matematikçilerdir ve İvan, Alyoşa'ya Lobachevsky geometrisini anlatmaya çalışır, ama bunu yanlış bir biçimde ifade eder. İki paralel doğrunun sonsuzluğun herhangi bir noktasında birleştiklerinden söz ederek Öklid ve Lobachevsky geometrilerini birbirine karıştırır. Öklid geometrisinde iki paralel doğru her noktasında birbirlerinden eşit uzaklıktadır ve kesişmezler, doğruların paralel olduğunu söylemek kesişmeye-

ceğini ilan etmek anlamındadır. Lobachevsky geometrisindeyse iki paralel doğru bir yönde birbirlerine yakınsarlar, öteki yönde ise birbirlerinden ıraksarlar (Şekil-1). Belki İvan, Lobachevsky geometrisinde paralel doğruların bir yönde yakınsıyor olmasından bu doğruların "sonsuzluğun herhangi bir noktasında birleştikleri" sonucunu çıkarır ama bu doğrular Öklid geometrisinin doğruları değildir artık; çünkü Lobachevsky, Öklid'in Beşinci Aksiyomu'na meydan okuyarak, o aksiyomu iptal etmiş, ilk dört aksiyomu koruyarak başka bir geometri inşa etmiştir.



Şekil-1

İvan'ın konuşmasından, Öklid geometrisinde iki paralel doğrunun sonsuzda kesişebileceğinin keşfinin yapıldığı sonucu çıkarabilir ki bu doğru değildir. Kuşkusuz, İvan Karamazov bir roman karakteridir ve matematiksel bir makale yazmamıştır; bu yüzden, bu yanlışları hoş görmek mümkün.

Romanda İvan, yine Alyoşa'ya seslenir ve Öklid-dışı geometrilere olan tepkisini şu sözlerle dile getirir:

> "Benim aklım, Öklid prensiplerine göre işleyen, yani yalnız bu dünyayı kavrayabilecek bir akıldır. […] Diyelim ki, paralel çizgiler bir noktada birleştiler, diyelim ki bunu ben de kendi gözümle gördüm; öyleyken bunu kendi gözümle gördüğüm halde, sadece "birleştiklerini gördüm" derim de ama gerçekten öyle olduğunu kabul edemem. İşte benim anlatmak istediğim bu Alyoşa!"

Öklid-dışı geometriler, İvan'ın akla olan sadakatini sorgulamasına neden olur. Hem Öklid hem de Kant, aksiyomları insanların değil Tanrı'nın yarattığına inanmışlardır. İvan da Kant'ın izinden giderek şunu savunur: İnsanın uzayı algılaması deneysel ve gözlemsel değil, deney ve gözleme gerek duymadan doğruluk ve gerçekliğini kabul ettiğimiz bir durum, mutlak ön kabuldür (*a priori*). Tanrı insanları üç boyutu algılayabilecek biçimde yaratmıştır, o halde aksiyomları ve geometriyi de üç boyuta göre yaratmış olmalıdır. Bu yüzden Öklid-dışı geometrilerin geçerliğini savunmak Tanrı'nın varlığına ters düşer.

İvan Karamazov, Öklid-dışı geometrilerin akla olan inancın altını oyacağını düşünerek, insanların çektiği acıların, kötülüklerin de Tanrı'ya olan inancın altını oyacağını savunur. Bu yüzden inanmak isteyen ama bunu yapmakta zorlanan, sorgulayan, inanca ve inançsızlığa matematiksel kesinlikte kanıt arayan bir karakterdir. Aslında Tanrı, çok da ilgisini çekmez, onun Tanrı'sı Epiküros'un Tanrı'larına benzer: Bizi yarattınız, üstünlüklerle kıldınız, size minnettarız ve artık dinlenebilirsiniz. Dostoyevski'nin *Cinler* adlı romanında nihilist Stavrogin'i tanımlarken kurduğu şu cümle aynı zamanda İvan'ı da çok iyi anlatır: "İnandığına inanmayan, inanmadığına da inanamayan." İvan'ın düşüncelerindeki bu belirsizlik zaman zaman Tanrı'ya karşı koymaya dönüşür ve bu tepkisini, çocuklara yapılan zalimliklere ait acıklı öykülerden örnekler vererek şöyle açıklar:

> "(…) Ben giriş biletimi geri vermeyi yeğ tutuyorum ve dürüst bir adam olarak onu en kısa zamanda geri vermek zorundayım. İşte yaptığım bu. Bu, Tanrı'yı yadsıyışım değil Alyoşa, sadece son derece saygılı olarak bileti O'na geri veriyorum."

Dostoyevski, *Karamazov Kardeşler*'in yazımını 1879'da bitirmiştir. Öklid-dışı geometrilerin keşfi ve bu konuda yapılan çalışmaların yayımlanmasıysa 1840 ile 1850'li yıllar arasına rastlar. Bu kuramlar o dönemde henüz çok yenidir, bilim çevreleri dışında pek bilinmez ve hiçbir uygulaması yoktur. Bu yüzden Dostoyevski'nin *Karamazov Kardeşler*'de Öklid-dışı geometriyi konu etmesi, "tüm evrenin, hatta evreni de içine alan sonsuzlu-

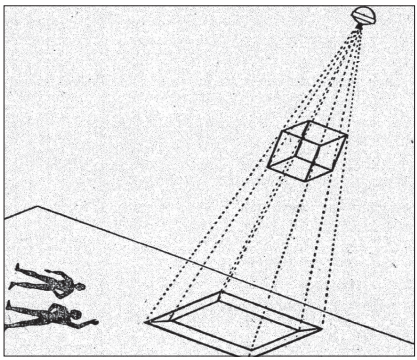
ğun bile Öklid geometrisine göre yaratılmış olmasından" kuşkulanan bilginlerin varlığından ve kuramlarından haberinin olması oldukça şaşırtıcıdır. Dostoyevski, matematik eğitimini 22 yaşında mezun olduğu Petersburg Askeri Mühendislik Koleji'nde almıştır. Profesyonel bir matematikçi olmamasına, matematiğe dışarıdan bakmış olmasına rağmen matematik dili ve metodolojisine ait bir kavrayışının olduğu bilinir. *Karamazov Kardeşler*'de İvan'ın matematiksel motifli konuşmalarından, Dostoyevski'nin Öklid-dışı geometrilerin, evrenin geometrisi olacağını sezdiği ve Öklid geometrisinin de sapasağlam kalacağını gördüğü anlaşılıyor. Böylesi bir öngörünün Dostoyevski'nin dehasını açıklayan örneklerden biri olduğunu düşünüyorum. Öte yandan Dostoyevski bize, edebiyat aracılığıyla matematiğin etkisinin ne kadar geniş olduğunu, matematikte tanımlardan, teoremlerden, formüllerden çok daha fazlasının bulunduğunu anlatıyor, matematiğin içinden edebiyata ve edebiyatın içinden matematiğe bakma fırsatını veriyor.

KAYNAKLAR

1) Vladimir Gubailovskii, *Russian Studies in Literature*, Dostoevsky's Geometry, M.E. Sharpe, 2007.
2) Mikhailovich Dostoevsky, *Karamazov Kardeşler*, Çev. Leyla Soykut, Cem Yayınevi, İstanbul, 1997.

DÜZÜLKE

Hayatları sadece sonsuz uzunluktaki bir kâğıt tabakasına hapsolmuş iki boyutlu yaratıkların (gölge insanların) var olduğunu düşünelim. Asla aşağı ya da yukarı hareket edemediklerini, düzlemin yüzeyine yapışık olarak yaşadıklarını varsayalım. Şimdi, bu yaratıkların üç boyutlu dünyanın nesnelerini, bu nesnelerin izdüşümlerine bakarak anlamaya çalıştıklarını hayal edelim. Örneğin gölge insanlar, küpün gölgesini kâğıt tabakası üzerine düşürdüğümüzde küp hakkında hangi bilgilere sahip olurlar? Kuşkusuz, aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi küpü bizim gördüğümüz gibi göremezler, ama sekiz köşesi ve on iki kenarı bulunduğunu saptayabilirler.



Yukarıdaki örnekte anlatmaya çalıştığımız boyutsal benzeşim kavramını şöyle tanımlayabiliriz: Üst boyuttaki bir uzayı kavrayabilmek için, önce içinde hareket ettiğimiz uzaydan daha sınırlı bir uzayı ve oradaki varlıkları hayalimizde canlandırma çabası. Küpün izdüşümü-

ne hayretle bakan iki boyutlu yaratıklar, dördüncü boyutu algılamada zorlanan, uzunluk, genişlik ve yükseklik yaratıkları olan biz insanlara benzetilebilir.

Bir başyapıt: Düzülke

Birçok yazar dördüncü boyuttaki giz perdesini benzeşim yöntemiyle aralamaya çalışmıştır. Bu konuyla ilgili yayımlanmış kitapların en önemlisi 1884'te Edwin A. Abbott'ın yazdığı *Düzülke* isimli romandır. Boyutsal benzeşimin mükemmel örnekleriyle dolu olan ve okurken sık sık "Uzayın boyutları neden üçle sınırlı kalsın ki?" sorusunu sorduğum bu kitabı tanıtarak sürdürelim yazımızı.

Düzülke, matematiksel bilimkurgunun başyapıtlarından biri olarak kabul edilir. Sonsuz Öklit düzleminde, yani iki boyutlu bir dünyada kurgulanmıştır. Bu ülkede yaşayan varlıklar, düz çizgiler, üçgenler, kareler, altıgenler, çemberler gibi geometrik şekillerdir. Kitap iki bölümden oluşmuştur.

Birinci bölümde *Düzülke* halkı ve yaşantısı anlatılır. Öyküyü anlatan bir karedir. Okuyucudan "uçsuz bucaksız bir kâğıt tabakası" hayal etmesini ister. Hiçbir şeklin yüzeyin altına inme ve yukarı yükselme olanağı yoktur. Birbirlerini düz çizgiler biçiminde görürler. Bunun neden böyle olduğunu *Bay Kare* şöyle açıklar:

> "Uzaydaki masalarınızdan birinin ortasına bir madeni para koyun; paranın üzerine eğilerek ona tam tepeden bakın. Para bir daire olarak görülecektir.
>
> Şimdi de doğrulup masanın yanında durun, dizlerinizi kırarak yavaş yavaş alçalın (böylece yavaş yavaş Düzülke sakinlerinin konumuna geleceksiniz), alçalırken bozuk paranın gözünüze daha oval göründüğünü fark edeceksiniz. Sonunda gözleriniz masanın yüzeyiyle tam olarak aynı hizaya geldiğinde (deyim yerindeyse gerçek bir Düzülkeli olduğunuzda) para artık oval de görünmeyecek, görebildiğiniz kadarıyla, düz bir çizgi haline gelecektir."

Düzülke'de sadece kadınlar tek boyutludur ve birer düz çizgidir. Toplumsal hiyerarşide en aşağı türden erkekten bile daha

aşağıdadırlar. En alt sınıftaki işçiler ve askerler ikizkenar üçgen, orta sınıftakiler eşkenar üçgen, meslek sahipleri ve "beyefendiler" kare veya beşgenden oluşur. Soylular altıgen ile gösterilir. Çokgenin kenar sayısı arttıkça sosyo ekonomik statü de artar ve kenar uzunlukları küçülerek bir çembere dönüşür. Çember en üst sınıf olan rahipleri temsil eder. Abbott, bu bölümde *Düzülke*'nin ikliminden evlerine, *Düzülke*'lilerin birbirlerini tanıma yöntemlerine kadar birçok konuyu iki boyut üzerinde kurgulayarak açıklar. Kadınların sosyal konumunu sorgular. Eşitlik ve insan hakları için verilen toplumsal mücadelenin en yoğun yaşandığı dönemlerden biri olan Victoria İngiltere'sini zekice hicveder.

Kitabın ikinci bölümündeyse *Bay Kare* boyutlar arasında maceralı bir yolculuğa çıkar. Abbott'ın bu bölümdeki asıl amacı dördüncü boyut kavramını ortaya koymak, bu konudaki giz perdesini aralamaya çalışmaktır. Bunu da boyutlar arasında benzeşim kurarak yapar. İlk olarak *Bay Kare* düşünde tek boyutlu *Çizgiülke*'yi ziyaret eder. *Çizgiülke*'de nokta ve çizgiler yaşamaktadır. *Bay Kare* sadece kuzey ve güney kavramlarının varolduğu bu ülkenin *Kral*'ına *Düzülke*'nin doğasını anlatmaya çalışır.

> Kral: Lütfen bana bu soldan sağa hareketi göster.
> Kare: Olmaz, Çizginizden bütünüyle dışarı çıkmadığınız sürece bunu yapamam.
> Kral: Çizgimden dışarı mı? Dünyadan dışarı mı demek istiyorsun? Uzaydan dışarı?
> Kare: Evet öyle. Sizin Dünyanızdan dışarı. Sizin Uzayınızdan dışarı. Çünkü sizin Uzayınız gerçek uzay değil. Gerçek Uzay bir Düzlemdir; oysa sizin Uzayınız yalnızca bir Çizgi.

Bu diyalog böylece sürer ve uzaysal benzeşim ustaca anlatılır. *Bay Kare* daha sonra, "*düşlerden gerçeklere geçiyorum*" diyerek *Düzülke*'ye geri döner ve olağanüstü bir zekâya sahip bir altıgen olan küçük torununa verdiği geometri dersini aktarır. Dersin ortasında torunu şöyle bir saptamada bulunur:

> "3^2 ile gösterilen ve her doğrultudaki uzunluğu üç inç olan bir Kare elde ediliyorsa; bu durumda kenar uzunluğu üç inç olan bir Karenin (nasıl olacağını bilmediğim) bir biçimde

> kendisine paralel olarak hareket ettirilmesiyle de her doğrultudaki uzunluğu üç inç olan (ne olacağını bilmediğim) Başka Bir Şey elde edilmesi, ayrıca bu şeyin 3^3 ile gösterilmesi gerekir."

Dede bu sözler üzerine *"Doğru yatağa. Ne kadar az saçmalarsan aklında o kadar çok mantıklı şey kalır."* diyerek düşünceye dalar ve yüksek sesle söylenir: *"Bu çocuk aptal; 3^3'ün Geometride hiçbir anlamı olamaz."* Bunun üzerine açıkça duyulan bir yanıt gelir: *"Çocuk aptal değil ve 3^3'ün de Geometride çok açık bir anlamı var."* Bu ses üçüncü boyuttan *(Uzayülke)* gelen bir küreye aittir. *Bay Kare* ve karısını ziyarete gelmiştir. Kahramanımızla baş başa görüşmek ister. Küre bir (en üst sınıf) daire şeklinde göründüğünden *Bay Kare*'nin üzerinde büyük bir etki yaratır. Kendisinin daha yüksek bir boyuttan geldiğini anlatmaya çalışır ama bir türlü onu ikna edemez. Evde uyuyan hizmetkârları ve diğer ev sakinlerini hiçbir odaya gitmeden görebildiğini söyler. Kapı veya kapak açmadan kapalı bir dolaptan muhasebe defterini aşırır. Ardından *Kare*'nin hayal gücünü genişletebilmek için, bir topun suya batıp çıkması gibi *Düzülke*'nin iki boyutlu dünyasının bir tarafından girip diğer tarafına geçer. Küre, *Düzülke* düzlemine teğet olduğunda önce bir nokta şeklinde görülür. Sonra gittikçe büyüyen bir daireye ve sonrasında da küçülüp bir noktaya dönüşerek kaybolur. Küre'nin önceki konumuna gelişinde de aynı olayları gözlemleyen *Kare* şaşkınlık içindedir. Küre'yi şeytani olmakla suçlar. Üçüncü boyutu kesinlikle kabul etmez. Bunun üzerine bir sonraki bölümde Küre'nin tepkisi *Kare*'yi *Düzülke*'den atmak olur. Böylece kare daha sonra öğretmeni olarak kabul edeceği Küre'yle birlikte üç boyutlu bir yolculuğa çıkar. Küre'den *Uzayülke*'nin sırlarını öğrenir ve daha fazlasını ister.

Acaba, dördüncü boyut da açıklanacak mı?

Romanın sonraki bölümlerinde üç boyutun dışında da boyutların olup olmadığının sorgulandığı sohbet ve maceralar vardır. Özellikle bu bölümlerde okur, birkaç sayfa sonra dördüncü boyutun da açıklanacağı hissine kapılabilir.

Abbott, boyutlar arasındaki benzeşimi Öklit geometrisinin bazı basit kavramlarının ve nitelikli bir edebiyatın eşlik ettiği metinlerle kaleme alır. *Düzülke*'de yaşayanların üst boyutu hayal etmelerindeki çaresizliklerini anlatır. Okurun kendini bir *Düzülke*'linin yerine koymasını amaçlar. Böylelikle okur iki boyutlu dünyadan üçüncü boyutu algılamanın güçlüğünü yaşayarak, dördüncü boyut hakkında bir bilgisinin olmadığının ayrımına varır. Bir *Düzülke*'li bacağını yukarı kaldırdığında görünmez oluyorsa; bizler de bir dördüncü boyutu gösterdiğimizde mi görünmez olacağız? "Dördüncü boyuttan gelen bir yaratık da *Uzayülke*'deki çelik kasaların içindeki değerli eşyaları, kasaları açmadan alabilir mi? Bu soruları ve daha fazlasını kendinize sorabilirsiniz. Abbott okura bir düş gücü kışkırtması yaşatır, mistisizme ve metafiziğe kaçmadan. Bizleri, bir alt boyutu inceleyerek bir üst boyutu anlamaya çağırır. Tıpkı Enis Batur'un

Bir şiiri elden geçirdim
Başka bir şiir çıktı içinden

dizelerinde olduğu gibi.

Günümüzden bin yıl öncesine baktığımızda insanların çoğunun Dünya'yı düz olarak düşündüğünü görürüz. Yeryüzü fiziğiyle gökyüzü fiziğini birleştirmek için yüzyıllar boyunca büyük düşgücü çabaları gerekmiştir. Abbott'ın *Düzülke*'yi kaleme aldığı dönemde uzayla zamanın birleştirilmesinden doğan dört boyutlu uzam fikri vardı. Ama çok yeniydi. Ete kemiğe bürünmüş bir fikir değildi. *Düzülke*'nin yayımlanmasından yaklaşık elli yıl sonra, Alman matematikçi Minkowski özel görelilik kuramını, ardından da Einstein genel görelilik kuramını formüle ettiler ve dördüncü boyutun bilimsel açıklaması yapılabildi. Einstein'ın 'evrenin geometrisi' dediği, Öklitçi olmayan "Rieman geometrisi" ninse Abbott'ın yaşadığı dönemde hiçbir uygulama alanı yoktu. Bu yüzden Abbott'ın *Düzülke*'si tüm bu bilinmeyenler arasından Öklit geometrisinin verileriyle Minkowski'ye, Einstein'a, bir anlamda geleceğe yazılmış bir mektup gibidir.

Günümüzde de genel görelilik teorisini anlamaya çalıştığımızda, zamanın dördüncü boyut olarak diğer üçünden onu farklı kılan özelliklerini algılamakta zorlanırız. Bilimin geliş-

mesinde görünenle görünmeyen arasındaki bağı kurmanın önemli bir payı olmuştur. Abbott bize bir zihin gözlüğü takmamızı önerir. Görünmeyen boyutlara bakabilmenin düş gücü için. Bunu da *Düzülke* sakinlerinin üçüncü boyutu algılama ve kabul etmeye karşı gösterdikleri direnci sergileyerek yapar. *Bay Kare* iki boyutu algılayamayan *Çizgiülke* Kral'ına öfkelenir; ama daha sonra kendisi de üçüncü boyutu reddeder. Sonrasında kabullenir ve verili bilgiyi sorgulayan çok kişinin yazgısı ile karşılaşır. *Düzülke* yöneticileri tarafından hapse atılır. Hapisten yazmayı sürdürür.

Aslında Abbott, *Düzülke*'de boyutların hapishanesini anlatır. Bizi kafamızın içindeki hapishaneden çıkmaya çağırır. Fiziksel ve sosyal çevremizle ilgili algımızın sınırlarını sorgular, bilimkurgu bir romanın geleceğe dönük sınırsızlığıyla.

KAYNAKLAR

1) Abbott, E. A, *Açıklamalı Düzülke*, Çev. Bıçakçı, B, Ayrıntı Yayınları, 2008.

2) Gamow, G, *Bilimin Uzak Sınırlarında*, Çev. Ataman, S, Türkiye İş Bankası Kültür Yayınları.

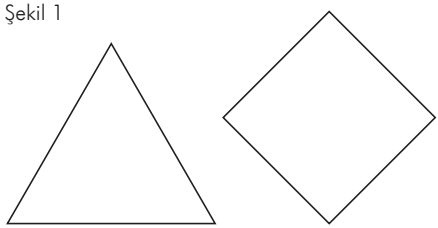
3. Bölüm

Meşhur Problemler

‘TERZİ PROBLEMİ’ ve MENTEŞELİ PARÇALANMALAR

Eşkenar üçgen biçimindeki bir kâğıdı makasla keserek çokgen parçalarına ayırdıktan sonra, bu parçaları yeniden düzenleyip birleştirerek bir kare elde edebilir misiniz?

Şekil 1

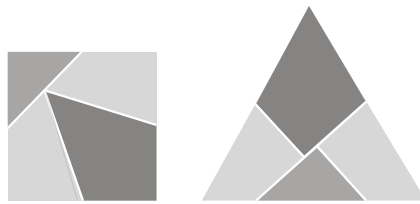


“Terzi problemi” olarak bilinen bu soru İngiliz yazar ve matematikçi Henry Dudeney (1857-1930) tarafından 1902’de sorulmuştur. Dudeney, matematiksel bulmacalar ve oyunlar konusunda çağının bir numarasıdır. Hazırladığı sorular 30 yılı aşkın bir süreyle birçok dergide yayımlanmıştır. En ünlü geometrik bulmacalarından biri olan “Terzi Problemi”ni *Weekly Disptach* ve *Daily Mail* isimli dergilerde sormuş, daha sonra bununla ilgili şöyle yazmıştır: “Bu problemi sorarak *Daily Mail* okurlarına adeta meydan okumuştum, gelen yüzlerce yanıttan bir teki bile doğ-

ru değildi. Bununla birlikte bu soruyu ilk kez *Weekly Dispatch*'te yayımladığımda eşkenar üçgeni dört parçaya ayırarak doğru çözümü gönderen sadece Mr. C. W. M'Elroy olmuştu." Bu problemin burada sorulmuş olmasıyla bir anlamda Dudeney, yaklaşık yüzyıl sonra bu kitabın okurlarına da meydan okumuş oluyor ama biz çözümü aşağıda vereceğiz.

Dudeney, hazırladığı problemlere hikâyeler yazar. "Terzi Problemi"nin hikâyesinde, sorduğu bilmecelerle ünlenmiş bir terziyi anlatır. Arkadaşları terzinin kendilerine bir bilmece sormasını isterler ama terzi oralı değildir. Yoğun ısrar üzerine onlara, onların beyinlerini bir ip gibi buracak bir sorusu olduğunu söyler. Çantasından çıkardığı eşkenar üçgen biçimindeki kumaşı göstererek şu soruyu sorar: "Bu kumaşı dört parça halinde kesip, bu parçaları bir araya getirerek bir kare elde edebilir misiniz?" Bazı arkadaşları bunu beş parçayla yapmanın yolunu bulabilirler ama dört parçayla yapamazlar. Terziyi zorlayıp cevabı almaya çalışırlar. Terzi, kesilecek parça sayısı kaç olursa olsun bunu yapmanın mümkün olmadığını söyler ve hikâye işin içine hileci bir kişinin karışmasıyla son bulur.

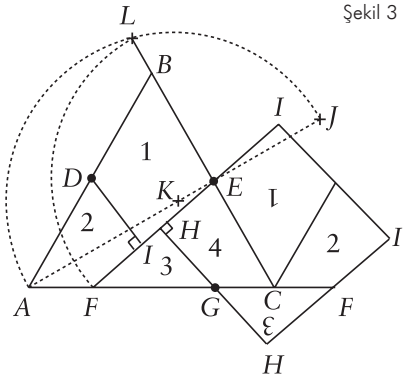
Dudeney, bu hikâyesiyle kendisinin önce beş parçalı çözümü bulduğunu, daha sonra dört parçalı çözümü keşfetmiş olduğunu anlatmış olabilir. Biz sözü uzatmadan dört parçalı çözüme geçelim. Şekil 2'de eşkenar üçgen ve karenin parçalanmış biçimi görülmektedir.



Şekil 2

Şimdi Şekil 2'deki parçalamanın inşasına başlayalım. Çözümü cetvel ve pergel kullanarak geometrik çizim yöntemiyle yapacağız. Yaptığımız parçalamanın doğruluğunu parçaları taşıyarak test edeceğiz.

Şekil 3

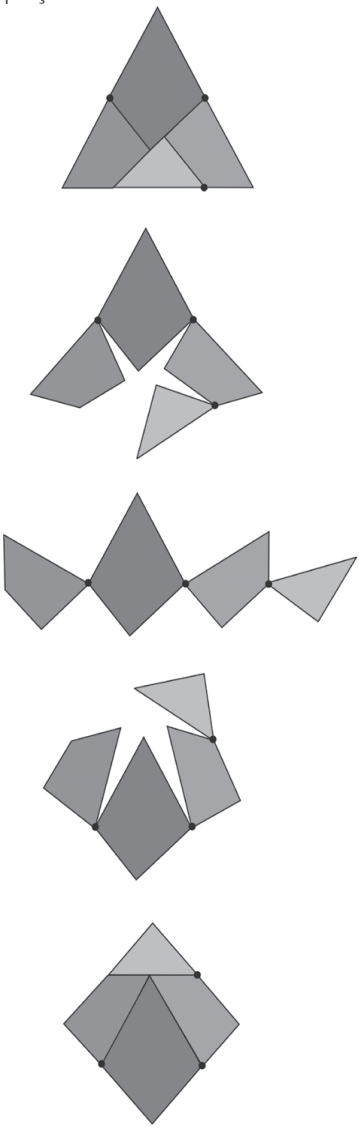


ABC eşkenar üçgeninin (Şekil 3) *AB* ve BC kenarlarının orta noktaları sırasıyla *D* ve *E* olsun. *AE* doğru parçasını $|BE| = |EJ|$ olacak biçimde uzatalım. *AJ*'nin orta noktası *K*'den, *K* merkezli *AK* yarıçaplı bir yarım çember çizelim. *EB* doğru parçasının uzantısının yarım çemberi kestiği nokta *L* olsun. Eşkenar üçgenin alanı karenin alanına eşit ve $|EL|^2 = |AE|.|EJ|$ olduğundan karenin kenar uzunluğu $|EL|$'ye eşittir. Şimdi *E* merkezli *EL* yarıçaplı bir yay çizelim. Bu yayın *AC*'yi kestiği nokta *F* olsun. Böylece karenin kenarı olacak *EL*'yi *EF* olarak eşkenar üçgenin içine taşımış olduk. Şimdi de en can alıcı hamleyi yapalım ve *AC* üzerinde $|FG| = |EB|$ olacak biçimde bir *G* noktası alalım. Yine alanların eşitliğini dikkate alarak karenin köşelerini elde edebilmek için *G* ve *D* noktalarından *EF*'ye indiğimiz diklerin dikme ayakları sırasıyla *H* ve *I* olsun. Böylece eşkenar üçgen dört parçaya ayrılmış oldu. Bu parçaların eşkenar üçgenin içinden karenin içine taşınışı Şekil 3'te görülmektedir.

Geometrik parçalamaların menteşelenmesi

"Terzi Problemi"ni bütün çokgenler için genelleştirirsek şu soruyu sormak gerekir: Eşit alana sahip her iki çokgenden herhangi birini çokgen biçiminde parçalara bölüp yeni bir düzenlemeyle diğer çokgeni oluşturabilir miyiz? Geometrik Parçalama adı verilen bu tür problemlerin Antik Yunan'a ve İslam medeniyetinin altın çağına kadar uzanan uzun ve renkli bir geçmişi vardır.

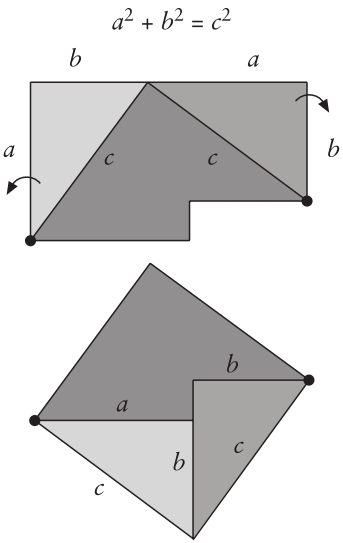
Şekil 4: Dudeney'ın eşkenar üçgenden kareye menteşeli parçalaması



1800'lerin başında İskoç matematikçi William Wallace geometrik parçalamaların genel bir kanıtının yapılıp yapılamayacağını araştırarak yukarıdaki sorunun yanıtını verir. Her iki çokgen için ortak parçalamanın mümkün olduğunu 1814'de kanıtlar ama yayımlamaz. 1831'de İngiliz matematikçi Lowry yaptığı çözümü yayımlar. Bundan kısa bir süre sonra da Macar ve Alman matematikçiler Bolyai ile Gerwien birbirlerinden bağımsız olarak çözümü yeniden keşfederler, bu nedenle bu teorem Bolyai-Gerwien Teoremi olarak bilinir.

Geometrik parçalamaların bir türü de menteşeli olanlarıdır. Çokgeninin parçaları köşelerinden döndürülebilir menteşeyle bağlanır, parçaların döndürülmesinden tek bir şekil oluşur, ters yönde döndürülürse diğer şekil elde edilir. Dudeney'in "Terzi Problemi", menteşeli parçalamaların başyapıtıdır. 1905'te Dudeney bu problemi menteşeli biçime getirerek Kraliyet Cemiyeti'nde Şekil 4'te görülen modeli sergilemiştir.

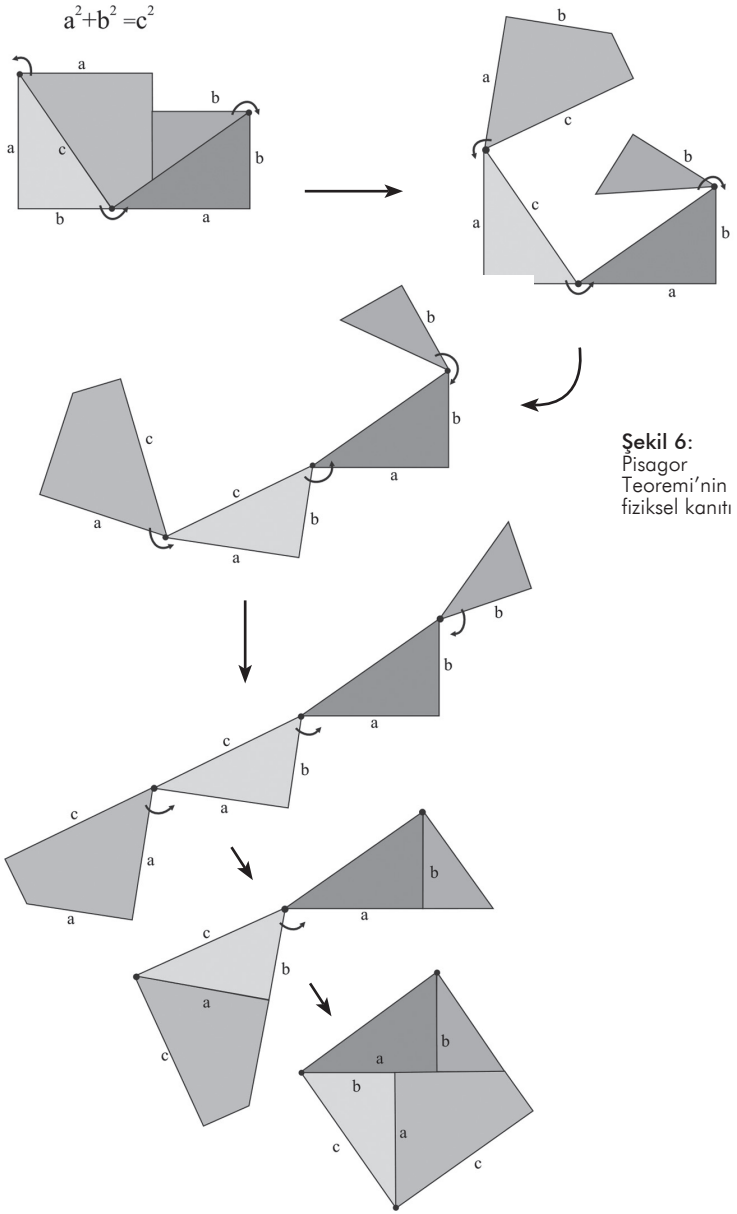
İlk menteşeli parçalamayı Dudeney değil, 1864'te İskoç matematikçi Philip Kelland gerçekleştirmiştir. Öklid'in *Elementleri*'nin birinci kitabının 47. önermesinin gösterimi olan iki menteşe ve üç parçadan oluşan bu model Şekil 5'de görülmektedir. Şekil 6'daki modelde ise üç menteşe, dört parça kullanılmıştır. Her iki modelde de Pisagor Teoremi'nin alanların eşitliğine dayalı fiziksel kanıtı yapılmıştır.



Şekil 5: İlk menteşeli parçalama

Bu parçalamalarla yapılan "kanıtlar" matematiksel kanıtın gereklerini yerine getirmez. Matematikte kanıt, teorem ve aksiyomlar esas alınarak bir önermenin doğruluğunun gösterilmesi yöntemi olduğundan Şekil 5 ve Şekil 6'da yer alan gösterimler için "fiziksel kanıt" deyimini kullandık. Ama bu şekiller üzerinden de Pisagor Teoremi'nin matematiksel kanıtını yapmak mümkündür.

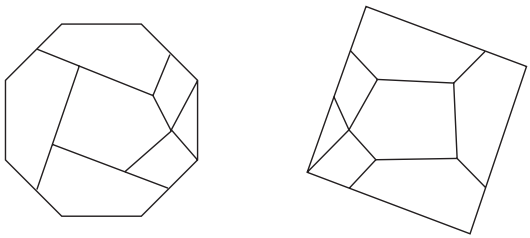
Menteşeli parçalamaların inşası diğer parçalamalara göre daha güçtür ve kısıtlayıcı özellikleri vardır; bir düğümü gözleriniz kapalıyken tek elle çözme zorluğuna benzetilebilir.



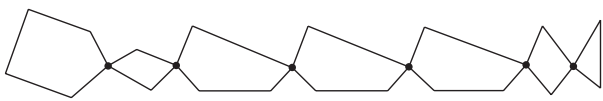
Şekil 6: Pisagor Teoremi'nin fiziksel kanıtı

Parçalamayı gerçekleştirirken, köşelerinden menteşelenen parçaların çevrilmesi ve döndürülmesiyle bir çokgenden diğer çokgenin nasıl elde edileceğinin hesaplanması gerekir. Menteşelerin koyulacağı yerlerin saptanması, en az sayıda menteşeli parçalamanın yönteminin ne olacağı gibi standart parçalamalarda görülmeyen zorluklar ortaya çıkar. Bu alanda 1800'lerde ortaya atılan, yakın zamana kadar çözülemeyen temel problem şöyleydi: Aynı alana sahip her iki çokgen için ortak bir menteşeli parçalama mümkün mü? Diğer bir deyişle herhangi bir standart parçalama menteşelenebilir mi? Bu problem birçok matematikçiye karşı direndi, sadece bazı özel durumlar için çözüm yapılabildi. Yaklaşık 200 yıl boyunca eşit alanlı herhangi iki üçgenin menteşeli parçalamalarının olduğu bile kanıtlanamadı. Ama 2007'de geometrinin bilgisayar bilimine dayalı bir dalı olan "hesaplamalı geometri" alanında çalışan altı Amerikalı akademisyen bu probleme beyaz bayrak sallattı. Yayımladıkları makalede çokgenlerin alt çokgen parçalarını eleman kabul eden sonlu kümeleri sınıflayarak iki boyutlu her standart parçalamanın menteşelenebileceğini gösterdiler. (Kaynak 2)

Geometrik parçalamalar alanında birçok araştırmaya imza atmış Amerikalı matematikçi G. N. Frederickson'nun *Hinged Dissection Swining & Twisting* isimli kitabından alıntıladığım bir menteşeli parçalama örneği Şekil 7'de görülmektedir.



Şekil 7.1: Sekizgenden kareye bir menteşeli parçalama



Şekil 7.2: Sekizgeni kareye dönüştüren menteşeli parçalar

Yaratıcılık, keşfetmenin heyecanı, akıl yürütme, matematiksel canlandırma, estetik… Hepsi var menteşeli parçalamalarda, ayrıca mühendislikte uygulaması da yapılıyor. Geçmişte kimyacılar iki boyutlu menteşeli parçalama esasına dayanan milimetrik ölçekli cihazlar imal etmişler. Biz bu yazıda iki boyutlu menteşeli parçalamalara değindik. Üç boyutlu menteşeli parçalamalar robotiklerin yapılandırılması ve nanoteknoloji açısından bakıldığında çok ilginç görünüyor. Gelecekte kendi kendine parçalanan ve farklı bir cisme dönüşen objeler görebiliriz.

KAYNAKLAR

1) G. N. Frederickson, *Hinged Dissection: Swinging & Twisting*, Cambridge University Press, 2002.
2) T. G Abbott, Z. Abel, D. Charlton, E.D. Demaine, M.L. Demaine, S. D. Kominers, *Hinged Dissections Exit*, arXiv: 0712.2094, 2007.
3) H. E Dudeney, *The Canterbury Puzzles*, Thomas Nelson and Sons, Ltd. London, 1919.
4) G. N. Frederickson, *Geometric Dissections Now Swing and Twist*, Purdue University, 2001.

BİR DEHANIN AYAKÜSTÜ ÇÖZDÜĞÜ PROBLEM

Hintli dahi matematikçi Srinivasa Ramanujan'ın hayatı matematik tarihinin en romantik, en etkileyici hikâyelerinden biridir. Bu hikâyenin en çarpıcı yanı, Ramanujan'la ünlü İngiliz matematikçisi G. H Hardy'nin yollarının kesişmesidir. Hardy'nin yazdığı "Bir Matematikçinin Savunması" isimli kitabın önsözünü kaleme alan İngiliz yazar C. P Snow bu karşılaşmayı şöyle anlatır: "Hardy, 1913 başlarında bir sabah, kahvaltı masasındaki mektuplar arasında Hindistan pulları ile donanmış, eski püskü büyük bir zarf bulur. Açtığında içinden İngilizlerinkine benzemeyen bir el yazısı ile yazılmış, satır satır sembollerle dolu yıpranmış kâğıtlar çıkar. Hardy, o sırada 36 yaşında dünyaca tanınmış bir matematikçidir. Böylesi tuhaf mektuplarla karşılaşmanın olağan olduğunu çoktan öğrenmiştir. Bu yüzden kâğıtlara isteksizce göz atar. Ama her şeyden önce canı sıkılmıştır; çünkü bozuk bir İngilizce ile matematiksel buluşları hakkında fikrini soran, tanınmamış bir Hintli tarafından yazılmış bir mektubu okumaya çalışmaktadır. Metinde, çoğu cüretkâr ya da hayalperest, birkaçı da herkesçe bilinen ve orijinalmiş gibi sunulan 100'den fazla formül ve teorem vardır. Hiçbirinin kanıtı yoktur. Hepsi garip bir kandırmacaya benziyordur. Hardy, canının sı-

kılmasının ötesinde sinirlenir de. Mektubu bir kenara bırakır, günlük işlerine koyulur. Ama gün içinde kafasını hep o "Hintçe" karalamalar kurcalar. Hiç görmediği, aklına getirmediği türden acayip formüller, teoremler… Kendine şu soruları sorar :"Bunlar dâhiyane bir aldatmaca mı? Dâhiyane bir aldatmaca olma olasılığı, meçhul bir matematik dehasının çalışmaları olma olasılığından daha mı büyük?" Hardy, mektuptaki yazılara akşamüzeri tekrar bakar, kendisine sorduğu soruların yanıtının "hayır" olabileceğini düşünür. Hemen, arkadaşı ünlü İngiliz matematikçi Littlewood'a yemekten sonra mutlaka görüşmeleri gerektiğini iletir. Kâğıtlarda yazılanları birlikte incelemeye başlarlar, kısa bir süre sonra, gece yarısı olmadan anlarlar ki bu sayfaların yazarı bir dâhidir."

Bu mektubun sahibi Srinivasa Ramanujan'dır. Hardy, mektuptaki formülleri inceledikten sonra, şaşkınlığını şu sözlerle dile getirmiştir: "Daha önce böyle formüllerle hiç karşılaşmamıştım. Bu formüller doğru olmalıydı; çünkü hiçbir akıl böyle formüller icat edebilecek hayal gücüne sahip olamazdı."

Hardy, mektubu okuduktan birkaç gün sonra, Euler ve Cauchy ayarında dâhi bir matematikçiyi keşfetmenin sevinciyle Ramanujan'ı İngiltere'ye davet eder. Çalıştığı üniversite Ramanujan'nın tüm giderlerini karşılayacaktır. Bu sırada Ramanujan, çok düşük bir ücret karşılığı Madras Posta İdaresi'nde kâtip olarak çalışmaktadır. Hardy hemen Madras Üniversitesi'yle iletişime geçer ve Ramanujan'a burs verilmesini sağlar. Ama asıl amacı, birlikte çalışabilmek için onu İngiltere'ye getirmektir. Bu arada Ramanujan, dini inançları yüzünden deniz aşırı yolculuk yapmasının olanaksız olduğunu bildirir. Ama daha sonra, annesi rüyasında oğlunu bir grup Avrupalının arasında otururken görür ve Namakkal tanrıçasından oğlunun yaşam amacının engellenmemesi emrini alır! Bunun üzerine Ramanujan, annesinin de onayını alarak, 1914'te İngiltere'ye gelir.

Sonrasında, Hardy'le birlikte olağanüstü yaratıcı çalışmalara imza atan Ramanujan İngiltere'de bilim alanında verilebilecek bütün şeref payelerinin sahibi olur. Ne yazık ki, 33 yaşında

yaşamını yitirir, erken yaştaki ölümü matematik dünyası için çok büyük bir kayıp olmuştur.

Bu yazıda, onun bir çırpıda çözdüğü ve Hardy'ye yazdığı mektuptaki çalışmalarının önemli bir bölümünü oluşturan "sürekli kesirlerle" ilgili bir problemi ele alacağız. "Bilinmeyen Adres" adıyla bilinen bu problem Ramanujan'a bir arkadaşı tarafından sorulduğunda, o mutfakta sebze doğramaktadır. Sebzeleri gaz ocağındaki tencereye koyar, birkaç dakika düşünür, arkadaşına problemi çözdüğünü söyler. Arkadaşının "Nasıl çözdün?" sorusuna verdiği yanıt şöyledir: "Bir anda, çözümün sonsuz sürekli kesirlerle yapılabileceği aklıma geldi. Sonra da hangi sürekli kesri kullanacağımı düşündüm ve cevap kafamda belirdi." Birçok karmaşık ve derin sayı ilişkisini inanılmaz bir biçimde kolaylıkla ortaya çıkaran Ramanujan'ın birkaç dakika içinde çözdüğü bu problemi çözümüyle birlikte inceleyelim.

Bilinmeyen adres problemi

Bir caddenin sadece bir tarafında bulunan n ev, sırayla 1'den n'ye kadar ardışık doğal sayılarla numaralandırılmış olsun. Numarası m olan öyle bir adres (ev) arıyoruz ki m ve n,

$$1+2+\ldots+(m-1) = (m+1)+(m+2)+\ldots+n$$

eşitliğini sağlayan 50'den büyük 500'den küçük bir doğal sayı ise, aradığımız evin numarası olan m sayısı ve en sondaki evin numarası olan n sayısı kaçtır?

Ramanujan'nın bu problemi nasıl çözdüğünü tam olarak bilmiyoruz, tahmini çözümü anlatmaya çalışacağız. Elbette onun kadar hızlı değil, hatta matematiksel çözümden önce deneysel çözüm yapmaya çalışarak.

Çözüme başlamadan önce, Gauss Formülü olarak bilinen ilk k doğal sayının toplamının

$$\frac{k(k+1)}{2}$$

olduğunu hatırlatalım.

$$1 + 2 + \ldots + (m-1) = (m+1) + (m+2) + \ldots + n$$

eşitliğinde Gauss Formülünü kullanırsak,

$$\frac{(m-1)m}{2} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m+1)}{2}$$

$m^2 = \frac{n(n+1)}{2}$ (I) elde edilir.

Buradan,

$m = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$ ve $n = \frac{-1+\sqrt{1+8m^2}}{2}$ (II) bulunur.

$\frac{k(k+1)}{2}$ kesrinde k yerine doğal sayıları yazarak bulunan sayılara üçgensel sayılar (1, 3, 6, 10 ...) denildiğini belirtelim ve m'nin bir üçgensel sayının karekökü olduğunu görelim.

Öte yandan (I) eşitliğindeki üçgensel sayı, m^2'ye eşit olduğundan aynı zamanda tamkare sayıdır. O halde üçgensel sayılar içinde tamkare sayıları bulmalıyız.

Örneğin ilk yirmibeş üçgensel sayıyı yazalım, bu sayılar içindeki tamkare sayıları arayalım. Sonra da (I) eşitliğini kullanarak m ve n sayılarını bulmaya çalışalım.

İlk yirmibeş üçgensel sayı:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, 210, 231, 253, 276, 300, 325, ...

Bu sayılar içinde tamkare olan sadece iki sayı var: 1 ve 36. (I) eşitliğinden (m, n) ikililerini (1, 1) ve (6,8) buluruz. Ama bu yöntemle bizim aradığımız m ve n doğal sayılarını (50'den büyük 500'den küçük) bulmamız için 40,000'den büyük üçgensel sayıları yazmamız gerekir. Bilgisayarla bu sayılar bulunabilir, fakat bunun hiçbir matematiksel değeri yoktur. Bu yüzden, bu deneysel yöntem yerine problemin genel çözümünü yapabileceğimiz matematiksel bir yol aramalıyız ki, Ramanujan da mutlaka bu yolu izlemiştir.

Şimdi (I) eşitliğine bakalım. n ya da n+1 çift sayıdır. n çift ise $n = 2t$ olsun. (I) eşitliğinden,

$m^2 = t(2t+1)$ elde edilir.

Bu eşitlikte t ve $2t+1$ sayılarının çarpımları tamkare olduğundan kendileri de tamkaredir; çünkü 1'den büyük ortak bölenleri yoktur.

$2t+1 = a^2$ ve $t = b^2$ olsun.

Bu eşitliklerden,

$a^2-2b^2 = 1$ (III) bulunur.

$m = ab$ olduğunu unutmayalım!

Benzer yolla, eğer $n+1$ çift ise $n+1 = 2c$ olsun. Yine (I) eşitliğinden,

$m^2 = c(2c-1)$

c ve $2c-1$ tamkare sayılardır.

$2c-1 = d^2$ ve $c = e^2$ eşitliklerinden

$2e^2-d^2 = 1$ bulunur.

Bu durumda, $a^2-2b^2 = 1$ denkleminin tamsayı çözümlerini bulmalıyız. Bu denklemin genel yazılışı, D tamkare olmayan bir sayı olmak üzere x ve y tamsayılarının sonsuz çözümünü veren $x^2-Dy^2 = 1$ dir.

Matematik tarihinde Pell Denklemi olarak bilinen bu eşitliğin, aslında John Pell'den (1611-1685) önce 7'inci ve 12'inci yüzyıllarda Brahma ve Bhaskara tarafından özel çözümü yapılmıştır.

Pell Denkleminin çözüm kümesini bulmanın çeşitli yolları vardır. Bunlardan bir tanesi sürekli kesirleri kullanarak yapılan çözümdür. Ramanujan da "Bilinmeyen Adres" problemini çözerken bu yolu kullanmıştır.

Şimdi, bu yöntemi bir teoremle açıklayalım.

Teorem: D tamkare olmayan bir doğal sayı, N bir tamsayı olmak üzere $x^2-Dy^2 = N$ denkleminin tüm çözümleri, $\sqrt{D}$ irrasyonel sayısının $[u_1, u_2, u_3, ...]$ sürekli kesrine açılmasıyla bulunur.

$[u_1, u_2, u_3, ...]$ kesrinin açılımını yapalım.

$$\left[u_1, u_2, u_3, \ldots\right] = u_1 + \cfrac{1}{u_2 + \cfrac{1}{u_3 + \ldots}}$$

Yukarıdaki teoremde D'yi 2, N'yi de 1 alırsak çözümünü aradığımız (III) denkleminin karşılığı olan $x^2 - 2y^2 = 1$ denklemini elde ederiz. Bu denklemin tüm çözümleri teoreme göre $\sqrt{2}$ sayısının sürekli bir kesre açılmasıyla bulunur. Peki, $\sqrt{2}$ sayısını basit sonsuz sürekli bir kesre nasıl açarız? Bu sorunun yanıtı sayılar teorisinin "Sonsuz Sürekli Kesirler" bölümünde $\sqrt{D}$ formundaki irrasyonel sayıların sürekli kesre açılımıyla ilgili bir teoremin uygulamasıyla ilgilidir. (Kaynak 5) Biz bu teoremin sonucu olarak $\sqrt{2}$ sayısını aşağıdaki gibi sonsuz sürekli kesre açacağız.

$$\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \ldots]$$

Şimdi, maalesef yine kanıtlamadan, meraklı okurun araştıracağını düşünerek, yukarıda sözünü ettiğimiz teoremlerden çıkan bir sonuç verelim:

$a^2 - 2b^2 = 1$ denkleminin tüm çözümleri $\sqrt{2}$'nin açılımında 2'nin tek sayıda tekrar etmesiyle bulunur. Şöyle ki:

$$[1,2] = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},\ [1,2,2,2] = \frac{17}{2},\ [1,2,2,2,2,2] = \frac{99}{70}$$

kesirlerinin payındaki sayılar a'ya, paydasındaki sayılar da b'ye eşit olur. $a = 3$ iken $b = 2$, $a = 17$ iken $b = 12$, $a = 99$ iken $b = 70$ dir. Bu şekilde devam edilirse her periyot başına bir çözüm bulunarak denklemin tüm çözümleri elde edilir.

Bilinmeyen Adres Probleminde aradığımız evin numarası olan m sayısının a ile b'nin çarpımına eşit olduğunu hatırlayalım. m, 50'den büyük 500'den küçük bir sayı olduğuna göre a ile b'nin çarpımı da aynı aralıktadır. Bu koşulu $a = 17$, $b = 12$ sayıları sağlar. O halde, $m = 17 \times 12 = 204$ olur. (II) eşitliğinde $m = 204$ yazılarak $n = 288$ bulunur. Bu sonuçlar problemin çözümüdür.

Bu çözümde izlediğimiz yukarıdaki yol, *m* ve *n*'yi sınırlamadan genelleştirilebilir. Bu çözümü merak eden okura Kaynak 1'i incelemesini öneririm.

Ramanujan'ın hangi sürekli kesri kullandığını tam olarak bilmiyoruz. Bu anekdotun yer aldığı *The Man Who Knew Infinity* (Kaynak 2) isimli kitapta bu ayrıntı belirtilmemiş. Ramanujan da bizim yaptığımız gibi $\sqrt{2}$'yi sonsuz sürekli kesre açmış olabilir. Hardy'e gönderdiği mektupta $\sqrt{2}$'nin açılımından daha karmaşık, eşsiz güzellikte sonsuz sürekli kesirler vardır. Belki daha karmaşık bir sonsuz kesirlerle bu problemi çözdü. Bilemiyoruz. Ama bilinmeyen adres problemini sebze doğrama süresi içinde çözdüğünden eminiz ve böylesi dehalara, insanlığın Hardy'nin örnek davranışındaki gibi sahip çıkması gerektiğine inanıyoruz.

KAYNAKLAR

1) Petkovic M, *Famous Puzzles of Great Mathematicians*, AMS, 2009.
2) Kanigel R., *The Man Who Knew Infinity*, Washington Square Press, 1991.
3) Yusubov İ., ***Anlamanın Sevinci ve Kederi***, Bilim ve Gelecek Kitaplığı, 2008.
4) Mc Coy N.H, *The Theory of Numbers*, New York, MacMillan 1965.
5) Pekasil M., "Sürekli Kesirler ve Pell Denlemleri", Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2006.
6) Hardy, G.H., *Bir Matematikçinin Savunması*, TÜBİTAK, Çeviri: Nermin Arık, 1993.

BİR KUMARBAZIN SORUSUNDAN OLASILIK TEORİSİNE...

Şans oyunları üzerinden başlayan bir bilim dalının,
insan bilgi dağarcığının en önemli parçalarından
biri olması kayda değer bir şeydir.

Pierre-Simon de Laplace

1654'te Antoine Gombaud adındaki bir şövalye büyük Fransız matematikçisi Blaise Pascal'a bir kumar problemi sorar. Pascal'ın arkadaşı olan Gombaud profesyonel bir kumarcıdır; Pascal'dan çözmesini rica ettiği problem, yarım kalan bir kumar oyununda ortadaki paranın oyuncular arasında nasıl paylaşılacağıyla ilgilidir. Pascal, problemin çözümünde belli bir aşamaya gelir, ama yaptığı çalışmalara katkıda bulunabilecek birinin yardımına da ihtiyaç duyar. Bir meslektaşının tavsiyesi üzerine ünlü Fransız matematikçi Pierre de Fermat'ya danışır. Böylece ikisi problem üzerine yazışarak çalışmaya başlarlar. Yoğun tartışmaların sonunda farklı yollardan aynı sonuca ulaşarak problemi çözerler. Ama daha da önemlisi bu ortak çalışmayla matematikte yeni bir alanın temellerini atmış olurlar: Olasılık Teorisi

Matematiksel olasılığın ortaya çıkışına ilham olan bu problemle daha önce Gerolamo Cardano, Luca Pacioli gibi matema-

tikçiler uğraşmışlar ama yanlış çözümlere varmışlardır. Matematik tarihinde "Paylaşım Problemi" olarak adlandırılan bu soruyu Fermat, önce özel çözümle ele almış; daha sonra Pascal'la birlikte farklı yaklaşımlarla genel çözüme ulaşmışlardır. Aşağıdaki paragraflarda bu soruyu önce doğrudan, daha sonra da hikâyeyle iki ayrı biçimde sorup, Pascal ve Fermat arasındaki yazışmalardan esinlenerek yazılmış olan iki kurmaca mektupla problemin çözümünü inceleyeceğiz.

Paylaşım Problemi. Eş beceriye sahip iki kumarbaz önceden belirlenen puana ilk ulaşan oyuncunun ortadaki paranın tümünü kazandığı bir oyun oynuyorlar. Ama oyun, bir sebepten dolayı sonlanamayıp ortada kalıyor. Kumarbazların oyunun yarım kaldığı andaki puanları ve oyunu kazanmaları için gereken puanlar belli olduğuna göre ortadaki para kumarbazlar arasında nasıl paylaşılır?

Pascal ve Fermat'nın Paylaşım Problemi. Pascal ile Fermat geçirdikleri yorucu bir günün ardından Paris'te bir kafeteryaya uğrarlar. Yorgunluk atmak için oyunların en kolayı olan, para atma oyununu oynamaya karar verirler. Eğer tura gelirse Fermat, yazı gelirse Pascal bir puan alacaktır. İlk kez 10 puan alan oyunu kazanacaktır. Her biri ortaya 50 Frank para koyar, böylece ortada 100 Frank olur. 100 Frank, kazananın olacaktır. Oyuna başlarlar, ama bir süre sonra beklenmedik bir gelişme olur. Fermat, 8'e karşı 7 üstün durumdayken bir arkadaşının hasta olduğuna dair bir mesaj alır, acilen Toulouse'a gitmesi gerekir. Mesajı getiren kişi hemen hareket etmek koşuluyla Fermat'yı Toulouse'ya götürebileceğini söyler. Tabii ki Pascal durumu anlayışla karşılar, ama ortadaki 100 Frankı nasıl paylaşacaklardır?

Fermat, Pascal'a gönderdiği bir mektupta paylaşım probleminin çözümünü yapmıştır. Yukarıdaki hayali hikâye de bu özel çözüme göre kurgulanmıştır. Aşağıdaki mektupta bu özel çözüm bulunmaktadır; bu ve sonraki mektup, Fermat ile Pascal arasındaki gerçek yazışmalardan (Kaynak 2) esinlenerek amatör matematikçiler tarafından yazılmış kurmaca mektuplardır.

Değerli Blaise,

100 Frankı bölüştürme probleminin senin de adil olduğunu düşüneceğin bir çözümünü buldum. Benim sadece 2, senin de 3 puana ihtiyacın olduğunu düşünürsek, oyun en fazla 4 atışta bitecekti. Bu dört atışta, eğer galibiyet için gereken 3 puanı alamazsan, bu benim kazanmam için gereken 2 puanı aldığım anlamına gelir. Benzer yolla, eğer ben 2 puanı alamazsam, sen kazanman için gerekli olan en az 3 puanı almış ve kazanmışsın demektir. Aşağıya bir madeni paranın 4 kez atılmasıyla elde edilen mümkün halleri eksiksiz yazdığıma inanıyorum. Benim kazandığım durumları parantez içinde gösterdim.

(tttt), (ttty), (ttyt), (ttyy), (tytt), (tyty), (tyyt), tyyy, (yttt), (ytty), (ytyt), ytyy, (yytt), yyty, yyyt, tyyy

Bu 16 durumun her birinin gerçekleşme olasılığının eşit olduğunu kabul ettiğini düşünüyorum. Bu yüzden, paranın $\frac{11}{16}$'ini benim, $\frac{5}{16}$'ini de senin alman gerektiğine inanıyorum, yani ben $100.\frac{11}{16} = 68.75$ Frank almalıyım ve tabii sen de 31.25 Frank.

Paris'te her şeyin yolunda olması temennisiyle,

Arkadaşın ve meslektaşın,
Pierre

Pascal, Fermat'nın yukarıdaki özel çözümünü genelleştirerek günümüz matematiğinde "kombinatorik" olarak bilinen teorinin temellerini atar. Bu çalışmasında, onun soyadıyla anılan ama daha önce Çin, İran, Hindistan gibi ülkelerde üzerinde çalışmalar yapılmış olan Pascal Üçgeni'ni de kullanmıştır.

Hikâyemizi sürdürelim… Fermat'nın mektubuna Pascal'ın aşağıdaki gibi yanıt verdiğini hayal edelim ve problemin genel çözümünün Pascal tarafından nasıl yapıldığını görelim.

Sevgili Pierre,

Açıkçası çözümünü oldukça tatmin edici buluyorum. Zarfın içinde sana borçlu olduğum parayı bulacaksın. Senin çözümünden ilham alarak bu problem üzerine daha çok düşünmeye başladım. Problemin genel çözümünü yapmak istiyorum. Sanıyorum ki tatmin edici bir çözüm buldum.

Çözümümüze bir daha göz atalım: İki veya daha fazla tura gelmesini içeren tüm sonuçlar senin için galibiyeti ifade ediyordu. Bu sonuçların toplam sayısı 4 farklı nesneden 2, 3 ve 4 nesneyi kaç farklı biçimde seçebileceğimizi bulup, toplamakla aynıdır. Burada yazı tura sonuçları bizim sayma hesabındaki nesnelere karşılık geliyor. Örneğin 2 tura, 2 yazı durumlarının sayısı C(4,2) = 6, 3 tura, 1 yazı durumlarının sayısı C(4,3) = 4, 4 tura durumu ise C(4,4) = 1'dir. Bütün bu sayıların toplamı senin kazanma durumlarının sayısı olan 11'i veriyor. Böylece senin kazanma olasılığın:

$$\frac{C(4,2)+C(4,3)+C(4,4)}{2^4}$$

olur. Ayrıca n farklı nesne içinden r nesneyi seçmenin sayma yapmadan kaç farklı yolu olduğunu tartıştığımızı ve aşağıdaki sonuca ulaştığımızı hatırlarsın sanırım.

$$\frac{n.(n-1).(n-2)...2.1}{r.(r-1).(r-2)...2.1.(n-r).(n-r-1)...2.1}$$

(Mektuba müdahale etmiş olacağız ama, günümüzde kullanılan modern notasyonda yukarıdaki kesrin kombinasyon hesabında kullanıldığını ve $C(n, r)$ olarak gösterildiğini belirtelim.)

Sevgili Pierre, oyun sayısı arttığında senin oyunu kazanma durumlarının toplam sayısını hesaplamak kolay olmayacak, ama bu toplamı aşağıdaki "üçgenin" satırları arasında bulmak mümkün.

```
                1
              1   1
            1   2   1
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
      ..............................
    ..................................
```

Bu "üçgen" $C(n, r)$ yerine NcR gösterimini kullanarak şöyle de gösterilebilir:

0c0
1c1 1c0
2c2 2c1 2c0
3c3 3c2 3c1 3c0
4c4 4c3 4c2 4c1 4c0
.....
.....

Şimdi problemin genel çözümüne geçiyorum: Oyunculardan birincinin n, ikincinin de m puana ulaşması gerektiğini varsayalım. Ortadaki paranın nasıl dağıtılacağını hesaplamak için "üçgende" önce yukarıdan aşağıya sayarak (n + m)'inci satırı bulalım. Bu satırın en soldaki ilk m terimini topladığımızda elde edilen sayı birinci oyuncunun kazanma durumlarının sayısını verir. Kalan terimlerin toplamıysa ikinci oyuncunun kazanma durumlarının sayısıdır. Böylece eğer, ortada s Frank para varsa birinci oyuncu şu kadarını alacaktır:

$$s.\frac{m+n\text{'inci satırdaki soldan ilk } m \text{ terimin toplamı}}{m+n\text{'inci satırdaki tüm terimlerin toplamı}}$$

İkinci oyuncu da şu kadar alır:

$$s.\frac{m+n\text{'inci satırdaki son } n \text{ terimin toplamı}}{m+n\text{'inci satırdaki tüm terimlerin toplamı}}$$

Bizim durumumuzda senin payına düşecek parayı bu yolla hesaplarsak:

$$100.\frac{1+4+6}{1+4+6+4+1} = 68{,}75 \text{ Frank olur.}$$

Arkadaşının iyileşmesi temennisiyle, sevgiler...

Blaise

Yüzyıllar öncesine gidip Fermat ve Pascal'ın kalemini kullanarak yazılmış olan bu hayali mektupların sözel bölümleri kurmacadır ama problemin çözümü Pascal'a aittir. Bu çözümle elde edilen sonuç modern notasyon kullanarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

Oyun iki kişiden birincinin n, ikincinin de m puana ulaşması gerekirken yarıda kalıyor; o zaman oyun en fazla $n+m-1$ kez oynanacaktır. $e(n,m)$ birinci oyuncunun kazanma olasılığı olsun. Eğer t sayma sayısı oyun öncesinde taraflar tarafından ulaşılması gereken puan ise;

$$e(o,t) = 1, e(t,t) = \frac{1}{2} \text{ ve}$$

$$e(n,m) = \frac{1}{2}[e(n-1,m) + e(n,m-1)]$$

olur. Yukarıdaki eşitlik için açıklama: Oyun $n+m-1$ kez oynandığından $n+m-1$ toplamı $(n-1, m)$ veya $(n, m-1)$ ikililerileriyle iki farklı şekilde elde edilebilir.

Birinci oyuncunun kazanma olasılığını Pascal'ın yaptığı genel çözüme göre günümüz notasyonunu kullanarak şöyle yazabiliriz:

$$e(n,m) = \frac{1}{2^{n+m-1}} \sum_{i=0}^{m-1} C(n+m-1,i).$$

Örneğin n = 2, m = 3 için yukarıdaki formülle

$$e(2,3) = \frac{1}{2^4}\left[C(4,0) + C(4,1) + C(4,2)\right] = \frac{11}{16}$$

sonucu bulunur ki bu da birinci oyuncunun kazanma olasılığıdır.

Pascal'dan sonra Fermat da bu problemin genel çözümünü farklı bir yoldan yapmış ve Pascal ile aynı sonuca ulaşmıştır. Bu problem 18. yüzyıldan sonra çok popüler olmuştur; çünkü Pascal'ın yaptığı genel çözüm, günümüzde tekrarlı permütasyon ve tekrarlı kombinasyon adı verilen yöntemleri ortaya çıkarmıştır. Lagrange, Laplace ve de Moivre gibi isimler bu yöntemleri "fark denklemlerinin" çözümünde bazı genel teknikler geliştirmek için kullanmışlardır. Pascal ve Fermat'nın oldukça kısa sayılabilecek bu çözümün sonuçları olasılık teorisinin ötesinde diferansiyel ve integral hesap, limit gibi matematiğin farklı alanlarına da uygulanmıştır. Bir kumar probleminin çözümü, şans oyunları, sigortacılık, iş planlaması gibi alanların çok ötesine geçmiş, gelecekle ilgili tüm dallara damgasını vurmuştur

KAYNAKLAR

1) Petkovic, M, *Famous Puzzles of Great Mathematicians*, AMS, 2009.
2) www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/pascal.pdf.

SONSUZU SAYMAK

Sonsuz bir kümenin elemanlarını sayabilir misiniz? Bu soru 19. yüzyılın ikinci yarısında ünlü Alman matematikçi Georg Cantor tarafından yanıtlanmıştır: *Eğer sonsuz elemanlı iki küme arasında bire bir eşleme varsa bu iki kümenin eleman sayısı aynıdır.* Bu tanımı çok basit bulabilirsiniz, ama yazının devamında basit olanın arkasındaki karmaşıklığı keşfederken keyif alacağınızdan eminim; çünkü bu tanım devrim niteliğindedir, daha önce akla hayale gelmeyecek bir düşünce olan "eleman sayısı" kavramını sonlu kümelerden sonsuz kümelere taşır. Sonsuz kümeleri *sayılabilir* ve *sayılamaz* olarak ikiye ayıran Cantor, sonsuz kümelerdeki sayma işleminin sonlu kümelerdekinden farklı ve şaşırtıcı yanlarını ortaya çıkarmıştır.

Sonsuz kümelerle çalışırken sezgilerimiz bizi çoğunlukla yanlış yola sürükler. Bu yazıda ele alacağımız bilmecelerle, sonsuz bir kümenin elemanlarını saymanın ilginç ve sezgilerimizle çelişen yanlarına değineceğiz.

Birinci bilmece: Sonsuz sayıdaki bilyeyle oynamayı çok seven (!) A ve B gibi iki kişinin sadece 1 dk. sürecek olan bir oyunu oynadıklarını hayal edelim. A'nın elinde 1, 2, 3, 4… diye numaralandırılmış sonsuz sayıda bilye var, B'de ise hiç bilye yok. Oyun saat 12'ye 1 dk. kala başlıyor.

A, (birinci adımda) saat 12'ye 1 dk. kala, 1'den 10'a kadar numaralandırılmış on bilyeyi B'ye veriyor, B, 1 numaralı bilyeyi A'ya geri gönderip, diğer dokuz bilyeyi elinde tutuyor.

A, (ikinci adımda) saat 12'ye 30 sn. kala, 11'den 20'ye kadar numaralandırılmış on bilyeyi B'ye veriyor, B, 2 numaralı bilyeyi A'ya geri gönderip, diğer bilyeleri elinde tutuyor.

A, (üçüncü adımda) saat 12'ye 15 sn. kala, 21'den 30'a kadar numaralandırılmış on bilyeyi B'ye veriyor, B, 3 numaralı bilyeyi A'ya geri gönderip, diğer bilyeleri elinde tutuyor.

A, (dördüncü adımda) saat 12'ye 7,5 sn. kala, 31'den 40'a kadar numaralandırılmış bilyeleri B'ye veriyor, B, 4 numaralı bilyeyi A'ya geri gönderip diğer bilyeleri elinde tutuyor.

Bu oyunun, her adım sonrasında sürenin yarıya düşmesiyle saat 12'ye kadar sonsuz adımda oynandığı varsayılırsa saat tam 12'de, A'nın ve B'nin elindeki bilye sayısı hakkında ne söyleyebilirsiniz? Her ikisinde de sonsuz sayıda mı bilye vardır? Yoksa tüm bilyeler herhangi birinde mi toplanmıştır?

İkinci bilmece: Bu oyun da saat 12'ye 1 dk. kala başlıyor.

A, (birinci adımda) saat 12'ye 1 dk. kala, 1'den 10'a kadar numaralandırılmış on bilyeyi B'ye veriyor, B, bu kez 1 numaralı bilyeyi elinde tutup, diğer dokuz bilyeyi (2, 3, …9) A'ya geri gönderiyor.

A, (ikinci adımda) saat 12'ye 30 sn. kala, 2'den 11'e kadar numaralandırılmış on bilyeyi B'ye veriyor, B, 2 numaralı bilyeyi elinde tutup, diğer dokuz bilyeyi(3, 4, …11) A'ya geri gönderiyor.

A, (üçüncü adımda) saat 12'ye 15 sn. kala 3'den 12'ye kadar numaralandırılmış on bilyeyi B'ye veriyor, B, 3 numaralı bilyeyi elinde tutup, diğer dokuz bilyeyi (4, 5, …12) A'ya geri gönderiyor.

A, (dördüncü adımda) saat 12'ye 7,5 sn. kala 4'den 13'e kadar numaralandırılmış bilyeleri B'ye veriyor, B, 4 numaralı bilyeyi elinde tutup diğer dokuz bilyeyi (5, 6, … 13) A'ya geri gönderiyor.

Bu oyunun da önceki bilmecedeki zaman aralıklarında saat 12'ye dek sonsuz adımda oynandığı varsayılırsa saat tam 12'de,

A'nın ve B'nin elindeki bilye sayısı hakkında ne söyleyebilirsiniz? Her ikisinde de sonsuz sayıda mı bilye vardır? Yoksa tüm bilyeler herhangi birinde mi toplanmıştır?

Üçüncü bilmece: Bu oyun da 12'ye 1dk. kala başlıyor ve aynı zaman aralıklarında oynanıyor

A, (birinci adımda) 1'den 10'a kadar numaralandırılmış on bilyeyi B'ye veriyor, B, 1 numaralı bilyeyi A'ya geri gönderiyor, diğer dokuz bilyeyi elinde tutuyor.

A, (ikinci adımda) 11'den 20'ye kadar numaralandırılmış on bilyeyi B'ye veriyor, B, 11 numaralı bilyeyi A'ya geri gönderiyor, diğer bilyeleri elinde tutuyor.

A, (üçüncü adımda) 21'den 30'a kadar numaralandırılmış on bilyeyi B'ye veriyor, B, 21 numaralı bilyeyi A'ya geri gönderiyor, diğer bilyeleri elinde tutuyor.

A, (dördüncü adımda) 31'den 40'a kadar numaralandırılmış bilyeleri B'ye veriyor, B, 31 numaralı bilyeyi A'ya geri gönderiyor diğer bilyeleri elinde tutuyor.

Bu oyunun da önceki bilmecelerdeki gibi saat 12'ye dek sonsuz adımda oynandığı varsayılırsa saat tam 12'de, A'nın ve B'nin elindeki bilye sayısı hakkında ne söyleyebilirsiniz? Her ikisinde de sonsuz sayıda mı bilye vardır? Yoksa tüm bilyeler herhangi birinde mi toplanmıştır?

Birinci bilmecenin yanıtı: Birinci adımda A, B'ye 10 bilye veriyor 1 bilye geri alıyor, B'nin 9 bilyesi oluyor. İkinci adımda A, B'ye yine 10 bilye veriyor 1 bilye geri alıyor. Böylece B'ye 9 bilye daha geliyor ve ikinci adımın sonunda 18 bilyesi oluyor. Bu şekilde devam edersek B'de üçüncü adımın sonunda 27, dördüncü adımın sonunda 36 bilye bulunur. Her adımın sonunda B'nin bilye sayısı 9 artar. Belirtilen zaman aralıklarında saat 12'ye dek sonsuz adım olduğuna göre saat tam 12'de B'nin sonsuz sayıda bilyesinin olduğunu söyleyebilir miyiz? İlk bakışta bu soruyu "Evet" diye yanıtlamak mümkün; çünkü n'ninci adımda B'nin 9n bilyesi var ve adım sayısı sonsuz olduğunda bilye sayısının da sonsuz olacağını söyleyebiliriz. ($\lim_{n\to\infty} 9n \to \infty$) Ama bu sonuca varmak için çok acele etmeyelim, bir de aşağıdaki çözümü inceleyelim.

Önce, her adımdan sonra hangi numaralı bilyelerin A ve B'de bulunduğunu kümelerle gösterelim. (A harfi her adımda B'den A'ya gelen bilyelerin, B harfi de B'deki bilyelerin kümesini göstersin.)

Birinci adımın sonunda:

$A_1=\{1\}$, $B_1=\{2,3,\ldots 10\}$

İkinci adımın sonunda:

$A_2=\{1,2\}$, $B_2=\{3,4,\ldots 20\}$

Üçüncü adımın sonunda:

$A_3=\{1,2,3\}$, $B_3=\{4,5,\ldots 30\}$

Dördüncü adımın sonunda:

$A_4=\{1,2,3,4\}$, $B_4=\{5,6,\ldots 40\}$

… …

n'ninci adımın sonunda:

$A_n=\{1,2,\ldots n\}$, $B_n=\{n+1,n+2,\ldots 10n\}$

Saat 12'ye dek bilmecede verilen zaman aralıklarıyla sonsuz sayıda adım atacağımıza göre saat tam 12'de A'nın ve B'nin elindeki bilye sayısı hakkında ne söyleyebilirsiniz? **Yanıt**: Bütün bilyeler (sonsuz sayıdaki) A'ya geri döner B'nin hiç bilyesi olmaz.

Sonlu adımların her birinde B'nin elinde dokuzun katı sayıda bilye varken, hem de gitgide artarken, sonsuz adımın "sonunda", saat tam 12'de B'de hiç bilye olmaz. Böylesi bir sonuç mümkün değilmiş gibi görünüyor; çünkü her adımda A'nın elindeki bilyeler azalıyor, B'dekiler artıyor. Nasıl olur da adım sayısı sonsuz olduğunda bütün bilyeler A'da toplanır, B'de hiç bilye kalmaz? B'nin elindeki bilyelerin gizemli bir biçimde saat tam 12'de "buharlaşmasına" yol açan etken nedir? Şaşırarak bu soruları sormamıza neden olan şey, sonluyu saymakla sonsuzu saymak arasındaki farktır. Bu farka göre, bu bilmecenin çözümünü şu basit açıklamayla yapabiliriz: Saat tam 12'de bütün bilyeler A'ya geri döner, B'de hiç bilye kalmaz; çünkü her adımda B, adım sayısıyla aynı numaradaki bilyeyi A'ya geri gönderir, sonsuz adım olduğuna göre bilyelerin tümü A'da toplanır. Her bilyenin A'ya kaçıncı adımda geri döndüğünü söyleyebiliriz. Örneğin B, 100.000 numaralı bilyeyi "yüz bin"inci adımda A'ya geri göndermiştir. O halde sonsuz sayıda adımın ardından (saat tam 12'de) A'nın sonsuz sayıda bilyesi olacaktır. A'dan gelen

her bilyeyi bir zaman sonra A'ya geri gönderen B'nin elinde saat tam 12'de hiç bilye olmayacaktır.

Bu açıklamanın matematiksel kanıtı şöyle yapılabilir: *n*'ninci adımdaki B_n kümesini kapsayan sonsuz elemanlı bir kümeyi aşağıdaki gibi yazarsak;

$$K_n=\{n+1,n+2,\ldots\},\ B_n \subseteq K_n \text{ olur.}$$

n sayısı ve *n*'den küçük bütün sayıların K_n kümesinin elemanı olmadığına dikkat edelim. Örneğin 100.000 sayısı $K_{100.000}$ kümesinde bulunmaz. 100.000'e eşit ya da 100.000'den küçük hiçbir sayı $K_{100.000}$ kümesinin elemanı değildir. Bu durum her sayı için geçerli olacağından sonsuzda hiçbir sayı K_n'nin elemanı olmayacaktır, dolayısıyla K_n, sonsuzda boş kümedir. $B_n \subseteq K_n$ olduğundan B_n kümesi de sonsuzda boş kümedir ve bu da bize B'nin sonsuz sayıdaki adım sonrasında hiç bilyesinin olmadığını gösterir.

Bu bilmece, matematikte "The Littlewood-Ross Paradoksu" olarak bilinir ve ilk kez 1953'te J. E. Littlewood tarafından tanımlanmıştır. Sonsuzluk paradokslarının çoğunda olduğu gibi bu bilmeceye de fiziksel gerekçelerle itiraz edilebilir. Örneğin, 1 dk. içinde gittikçe azalan zaman aralıklarında sonsuz sayıda adımın atılamayacağı söylenebilir. Saat tam 12'de belirsiz bir durumun olduğu ve saat 12'den önceki adımlarda B'nin elinde sonsuz sayıdaki bilyenin "aniden yok olmasının" mümkün olamayacağı öne sürülebilir. Bir yanıyla bu bilmeceyi paradoks yapan da bu itirazlardır. Ama bu itirazların matematiksel bir değeri yoktur; çünkü sonlu zamanda sonsuz adım "matematiksel sonsuz" için geçerli olup fiziksel gerçeklerle doğrudan ilişkili olmayan soyut bir süreçtir. Örneğin, "Saat 12'den hemen önce B'nin A'ya verdiği bilyenin numarası kaçtır?" sorusu bir matematikçi için anlamsızdır; çünkü B'den A'ya gönderilen sonsuz sayıdaki bilye içinde sonsuz numaralı bir bilye yoktur. Her sonlu adım sonunda B'nin elinde A'ya göndereceği son bir bilye vardır. Örneğin *n*'ninci adımın sonunda B'nin elinde bulunan son bilyenin numarası 10*n* iken A'nın elindeki son bilyenin numarası *n*'dir. Sonsuzda durumu daha iyi görebilmek için *n*'ninci adımın sonuna bir kez daha bakalım.

$$A_n = \{1,2,\ldots n\},\ B_n = \{n+1,n+2,\ldots 10n\}$$

Sonsuz adımın ardından bu kümeler;

$M=\{1,2,\ldots\}$, $N=\{n+1,n+2,\ldots\}$ olur ama N, M'nin alt kümesidir; çünkü sonsuzda B_n kümesinin boş küme olduğunu göstermiştik. O halde, her iki kümenin de en büyük elemanı bulunmadığından sonsuz numaralı bir bilyeden söz edemeyiz.

İkinci bilmecenin yanıtı: Bu kez başlangıçta A'da bulunan sonsuz sayıdaki bilyenin tümü B'de toplanır, A'da hiç bilye kalmaz. Bu bilmecede A, elindeki bilyeleri birinci bilmecedekinden farklı bir yolla B'ye gönderiyor. B ise 1 numaralı bilyeden başlayarak sırayla her adım sonunda adım sayısına eşit sayıda bilyeyi elinde tutuyor, A'daki bilyeler birer birer eksiliyor, sonsuz adımın ardından bütün bilyeler B'ye geçiyor. Bu bilmecede de sonlu adımların her birinde A'daki bilye sayısı daha fazladır ama önceki bilmeceye benzer bir sürecin sonunda A'da hiç bilye kalmaz.

Üçüncü bilmecenin yanıtı: Saat tam 12'de A ve B'nin her ikisinde de sonsuz sayıda bilye bulunur. Bu bilmecede B'nin elinde tuttuğu bilyelerin numaralarına dikkat edersek; B, her adımda numaraları $K = \{1,11,21,31,\ldots\}$ kümesinin elemanları olan bilyelere sırasıyla sahip oluyor ve sonsuz adımın ardından sonsuz sayıdaki bilyeyi elinde tutuyor. A ise saat tam 12'de B deki bilyelerin dışında kalan, numaraları $L=\{2,3,5,6,\ldots\}$ kümesinin elemanları olan sonsuz sayıdaki bilyenin sahibi. Her sonlu adımın sonunda A'daki bilye sayısı B' dekinin dokuz katı olmasına rağmen sonsuz adımın ardından her ikisinde de sonsuz ve eşit sayıda bilye bulunuyor. Peki, bu nasıl oluyor? Bu sorunun yanıtı şu detayda gizlidir: Sonsuz bir küme, sonlu kümenin aksine, eleman sayıları (güçleri) ana kümenin eleman sayısına eşit olan iki ayrı alt kümeden oluşabilir. K'nin her elemanı L'nin elemanlarıyla ve bütün bilyelerin numaraları olan sayma sayılarıyla bire bir eşlenebilir. Bu yüzden sonlu kümeler için geçerli olan "parça bütünden küçüktür" düşüncesi sonsuz kümlere uygulanamaz.

Cantor'un büyük bir ustalıkla gerçekleştirdiği bu keşifler bize, sonsuzu sayarken uygulanan sayma işleminin bambaşka türden bir "aritmetik" olduğunu gösterir. Bu soyut bilmecelerin anlattığından daha fazlasını merak eden okura Cantor'un "sonsuzlar dünyasına" yolculuk etmesini öneririm.

BÖYLE OTEL OLUR MU?

Bu yazıda efsanevi Alman matematikçi David Hilbert tarafından kurgulanmış, popüler matematik meraklılarınca iyi bilinen bir hikâyeden söz edeceğiz. Hilbert bu hikâyeyi, vatandaşı Georg Cantor'un keşfettiği, matematik dünyasını derinden sarsmış sonsuz kümeler kuramına giriş yapabilmek için girdiği derslerde anlatırmış.

Belki çoğu okura göre "tekrar suçu" işleyeceğim, ama bu mükemmel hikâyeden habersiz matematik meraklısı birçok gençle karşılaşıyorum. Onlara da ulaşmayı düşünerek matematiksel heyecanı yüksek bu öyküyü bazı küçük kurgu değişiklikleriyle kaleme almak istedim.

Otel Hilbert, sonsuz sayıda odası olan bir otel! 1, 2, 3, 4… diye numaralandırılmış, bir kişilik sonsuz sayıda odası var.

Tüm odalarının dolu olduğu bir gün, otele bir müşteri gelir. Resepsiyondan otelde boş yer olmadığını öğrenerek hayal kırıklığıyla çıkış kapısına doğru yöneldiği sırada lobide oturan David Hilbert'in sesi duyulur:

- Bir dakika bayım, sizin için boş bir oda bulabiliriz.

- Nasıl? Kalan konuklardan birinden odasını boşaltmasını mı isteyeceksiniz?

- Yok, hayır, şöyle yapabiliriz: Konuklarımızdan odalarını birer kaydırmalarını rica edeceğiz. 1 numaralı konuk 2 numaralı

odaya, 2 numaralı konuk 3 numaralı odaya, 3 numaralı konuk 4 numaralı odaya geçer ve bu şekildeki taşınma sonsuza dek yapılırsa 1 numaralı odaya siz geçebilirsiniz.

- İyi ama, son odada kalan son konuğu dışarı mı atacaksınız?

- Otelimizde sonsuz sayıda oda olduğunu söylemiştim, son oda ve son konuk yok maalesef.

- Mükemmel! Teşekkürler.

Ertesi gün otelde işler daha da açılır. Bu kez, otelin önüne sonsuz sayıda yolcusu olan bir otobüs park etmiştir. Yolcuları gezdiren rehber resepsiyon görevlisinden boş yer olmadığını öğrenerek sonsuz sayıdaki yolcusuna başka bir otel bulmayı düşündüğü sırada yine Hilbert'in sesi duyulur:

- Odalarımız dolu, ama yolcularınıza oda bulabiliriz.

- Otobüste sonsuz sayıda yolcu var, sonsuz sayıda oda açabilecek misiniz?

- Tabii ki, hiç sorun değil. Otelimizdeki konukları içinde oldukları odanın numarasının iki katı numaralı odalara taşıyacağız. 1 numaralı konuk 2 numaralı odaya, 2 numaralı konuk 4 numaralı odaya, 3 numaralı konuk 6 numaralı odaya, 4 numaralı konuk 8 numaralı odaya geçer ve taşınma işlemi sonsuza dek yapılırsa sonsuz sayıdaki tek sayılı (1, 3, 5, 7…) odalar boş kalır. Otobüsün 1 numaralı koltuğunda oturan yolcuyu ilk tek sayı olan1 numaralı odaya, 2 numaralı koltukta oturan yolcuyu ikinci tek sayı olan 3 numaralı odaya, 3 numaralı koltukta oturan yolcuyu üçüncü tek sayı olan 5 numaralı odaya yerleştirir ve böylece devam edersek otobüsünüzdeki bütün konukları ağırlayabiliriz.

- Çok güzel, müthiş bir buluş, çok teşekkürler. Ben yolcuları çağırmaya gidiyorum.

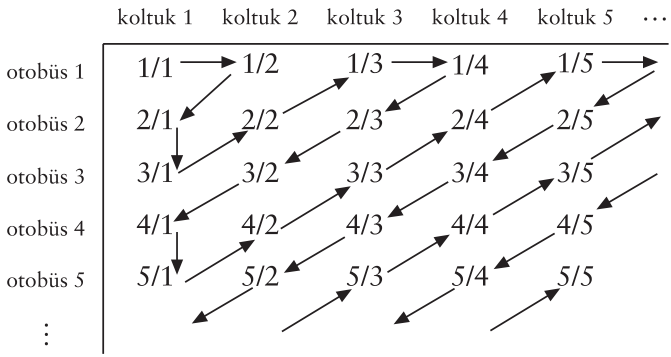
Üçüncü günün sabahında otel görevlileri şaşkınlık içindedir, otelin önüne sonsuz sayıda otobüs gelmiştir ve her otobüste sonsuz sayıda yolcu vardır. Otobüs 1'in yanına Otobüs 2, Otobüs 2'nin yanına Otobüs 3 park eder ve bu şekilde park etmeyi sürdüren sonsuz sayıda otobüsten ucu bucağı görünmeyen bir konvoy oluşmuştur.

Otel doludur. Acaba, otobüslerdeki her yolcu için yeni bir oda bulmak mümkün müdür? Bütün gözlerin üzerine çevrildiği Da-

vid Hilbert gayet sakin, "Sorun yok, yeni gelen her yolcuya bir oda bulabiliriz." diye mırıldanır ve ardından da "İlk yapmamız gereken şey, önceki günkü gibi sonsuz sayıda odayı boşaltmak olmalı." diye ekler. Aynı yöntemi kullanır, yani yine oteldeki herkesi kendi oda numarasının iki katı olan odalara yerleştirir. Böylece sonsuz sayıdaki tek numaralı odaların tümü boşalmış olur. Şimdi yapılması gereken tek şey sonsuz sayıdaki otobüs kafilesinde bulunan tüm yolcuları saymanın bir yolunu bulmaktır. Böylece ilk yolcu 1 numaralı odaya, 2. yolcu 3 numaralı odaya, 3. yolcuyu 5 numaralı odaya yerleşecek ve böyle devam edilirse kafiledeki tüm yolcular odalarına yerleşmiş olacak.

Bu kez Hilbert'in işi daha zordur. Eline kalemi alıp, aşağıdaki tabloyu yapar. Her yolcuyu listeler. Her bir yolcuya *a/b* biçimindeki bir kesirle bir numara verir.

Burada *a* otobüsün numarasını, *b* ise yolcunun oturduğu koltuğun numarasını gösterir. Örneğin 1/1, ilk otobüsün ilk yolcusunu, 2/3 ikinci otobüsün üçüncü yolcusunu gösteriyor.



Hilbert, kafiledeki bütün yolcuları tabloda görüldüğü gibi zikzak bir yol izleyerek sayabiliyor. Bu yöntemle saymaya başlanırsa ikinci kişi birinci otobüsün ikinci yolcusu (1/2), üçüncü kişi ikinci otobüsün birincisi yolcusu (2/1), dördüncü kişi üçüncü otobüsün birinci yolcusu olur. Böylece devam edilirse bütün yolcular aşağıda gösterildiği gibi sayılmış olur.

Boşaltılmış odalar	1	3	5	7	9	…
Kafiledeki yolcular	1/1	1/2	2/1	3/1	2/2	…

Kıssadan hisse

Otel Hilbert hikâyesi buraya kadar olan bölümüyle bize neyi anlatıyor? Bu soruyu yanıtlamadan önce matematiksel sonsuzun fikir babası Georg Cantor'un sonsuz kümelere şaşırtıcı yaklaşımından birkaç cümleyle söz edelim.

Cantor, doğal sayılar kümesiyle birebir eşlenebilen tüm sonsuz kümelerin (tek tamsayılar, kareler, asallar gibi) aynı büyüklükte olduğunu saptar. Bu büyüklüğe, İbrani alfabesinin ilk harfine sıfır alt indisi kullanarak ($\aleph_0$) alef sıfır adını verir. Elemanları doğal sayılar kümesiyle birebir eşlenebilen her bir sayı kümesinin eleman sayısı, daha doğrusu büyüklüğü $\aleph_0$'dır. Eğer sonsuz sayıda elemandan oluşan bir kümenin elemanlarını doğal sayılar kümesinin elemanlarıyla birebir eşleyebiliyorsak bu kümenin elemanlarını sayabiliyoruz demektir. Ki bu tür kümelerin tümünün büyüklüğü $\aleph_0$'dır. Cantor buradan "sayılabilir sonsuzluk" kavramına ulaşmıştır. Elbette ardından da sayılamaz sonsuzluğa. Cantor'un bu adımı bir devrimin başlangıcı olarak kabul edilir.

Hikayemize dönersek…

Birinci gün: Otelde tüm odalar doluyken gelen bir müşteriye oda açılabilir. Matematik sembolleriyle ifade edersek: $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$ (Yaygın olarak kullanılan anlatımı: sonsuz artı bir eşittir yine sonsuz)

İkinci gün: Otelde tüm odalar doluyken sayılabilir sonsuzlukta odaya sayılabilir sonsuzlukta yolcu yerleşebiliyor. Bu cümlenin matematiksel ifadesi:

$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ (Yaygın anlatımı: sonsuz artı sonsuz eşittir yine sonsuz.)

Üçüncü gün: Otelde tüm odalar doluyken sayılabilir sonsuzluktaki otobüste bulunan sayılabilir sonsuzluktaki yolcuya oda bulunuyor. Matematiksel ifadesi:

$\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$ (Yaygın anlatımı: sonsuz çarpı sonsuz eşittir sonsuz)

Dikkat edilirse sonsuz kümelerde yapılan işlemler aritmetikteki işlemlerden çok farklıdır. Bu yüzden parantez içinde "yaygın anlatım" ifadesini kullanarak yazdığımız cümleler doğru değildir; çünkü bu cümleler, aritmetiksel işlem dünyasıyla ilgilidir, sonsuz kümelerde geçersizdir.

"Görüyorum, ama inanamıyorum"

Şimdi, Cantor'un çok şaşırtıcı bir keşfinden söz edelim. Koltuklar ve otobüsler tablosuna bakarsak, *a* / *b* şeklinde ifade edilen her kişi $\frac{a}{b}$ kesriyle gösterilebilir.

Tablo sağa ve aşağıya doğru sonsuz şekilde genişletildiğinde tüm pozitif kesirleri kapsayacaktır. Örneğin

$\frac{1789}{668}$ kesri 1789'uncu satır ve 668'inci sütunda yer alır.

Tabloda her bir otobüsteki her yolcuyu saymak için kullandığımız zikzak sayma yöntemi, pozitif tüm kesirleri saymak için de kullanılır. Dolayısıyla tüm pozitif kesirler kümesi ve tüm doğal sayılar kümesi aynı büyüklüktedir, yani $\aleph_0$. Sezgilerimiz bize doğal sayılardan daha fazla kesirli sayıların olduğunu söyler, ama Cantor yanıldığımızı göstermiştir. Cantor bile kendi ulaştığı sonuca inanamamış, arkadaşı Dedekind'e yazdığı mektupta "Görüyorum, ama inanamıyorum." cümlesini kurmuştur.

Otelde kargaşa, matematikte devrim!

Otel Hilbert'e dönerek Cantor'un çok şaşırtıcı bir keşfinden daha söz edelim. Bu keşif matematiksel aklın en güzel meyvelerinden biridir. Birçok matematikçinin güvenli dünyalarını sarsmış, kimilerince matematiksel sapkınlık olarak nitelendirilmiş, ama matematikte çığır açıcı sonuçlara yol açmıştır.

Bu kez, otelin tüm odaları boştur ve otel yönetimi sonsuz sayıda müşterinin geldiği günlerin özlemiyle işlerin yoluna sokulması için ne yapılması gerektiğini kara kara düşünmektedir. Hilbert'in "Ben bu konuda bir şey yapamam, ama istediğiniz sayıda müşteri bulun, odalara nasıl yerleştireceğinizi söyleyeyim." dediği sırada mükemmel bir haber gelir. Otelin önüne yine son-

suz sayıda otobüs park etmiş ve her bir otobüste sonsuz sayıda yolcu vardır. Bu sefer, her bir yolcunun elinde 0 ve 1 sayıları arasında bulunan sonsuz genişlikteki tüm ondalık sayıların yazılı olduğu kartlar bulunmaktadır. Bu kartlardaki ondalık sayıların tümü birbirinden farklı olup, (0, 1) aralığındaki tüm sonsuz genişlikteki ondalık sayıları kapsamaktadır. Tabii ki yolcuların ellerindeki kartların uzunlukları da sonsuz genişliktedir. Elbette, genişliği sonlu olan ondalık sayıların yazılı olduğu kartları taşıyan yolcular da olabilir. Ama bu kartlardaki sayılar sağ taraflarına sonsuz sayıda sıfır ekleyerek genişliği sonsuz olan ondalık sayılara dönüştürülebilir. Böylece (0,1) aralığındaki tüm ondalık sayılar kartlarda yazılıdır.

Yolcuları gezdiren rehber resepsiyona gelip otelde kendilerini ağırlamanın bir yolu olup olmadığını sorar. Otel yönetimi bu sorunu Hilbert'in kolaylıkla çözeceğini düşünerek rehbere olumlu yanıt verir ve yolcular yavaş yavaş otele gelmeye başlar.

Hilbert lobidedir ve elinde kağıt kalem bazı hesaplar yapmaktadır. Bu arada otobüslerdeki müşteriler akın akın otele geliyordur. Otel yönetimi henüz Hilbert'ten olumlu bir yanıt alamamıştır. Hangi odaya gideceklerini bilemeyen yolcuların gösterdikleri tepkiler büyük bir kargaşaya neden olur.

Hilbert ayağa kalkarak, bu kez, gelen tüm müşterilerin otele yerleştirilmesinin mümkün olmadığını söyler. Otel yöneticileri, hiç beklemedikleri bu söz üzerine şaşkınlık içinde Hilbert'ten biraz daha çalışmasını ve bir yöntem bulmasını rica ederler. Yöneticilerin bir türlü aklı almıyordur, çünkü daha önce de sonsuz sayıdaki otobüsle sonsuz sayıda yolcu gelmiştir, bugün de. Ama bu kez durum farklıdır, (0, 1) aralığındaki her bir ondalık sayıyı listeleyerek saymak pek kolay değildir.

Kahramanımız Hilbert, bu işlemin mümkün olmayacağını şöyle açıklar: (0,1) aralığındaki tüm ondalık sayıları içereceğini varsayarak yapılacak her bir sonsuz listede olmayan, ama (0,1) aralığında bulunan bir sayı mutlaka vardır. Bunu kanıtlayabilirim. Oda bulma umuduyla otelde bulunan yolcular, otel çalışanları ve yöneticiler hüsran duygusuyla Hilbert'in etrafında toplanmışlardır.

Hilbert ilk iş olarak lobideki yolcuların elindeki kartların numaralarından oluşan bir liste yapar ve bu listenin dışarıdaki sonsuz sayıda yolcunun kartlarındaki numaralarla sonsuza deksürdürülebileceğini söyleyerek, aşağıdaki listeyi kâğıda yazar. (Gelişigüzel seçilmiş bu numaraların sonsuz genişlikte olduklarını biliyoruz.)

Oda 1 0,5738949…
Oda 2 0,2023246…
Oda 3 0,4218654…
Oda 4 0,0398716…
Oda 5 0,7770175…
Oda 6 0,3469679…
Oda 7 0,1875696…
Oda… 0

Hilbert'in amacı (0, 1) aralığında olup listede bulunmayan ondalık sayıyı bulmaktır. Bunu da aşağıdaki yöntemi kullanarak yapar. İlk olarak 1'inci odadaki ondalık sayının virgülden sonraki ilk rakamını, daha sonra 2'inci odadaki sayının virgülden sonraki ikinci rakamını, sonrasında da 3'üncü odadaki sayının virgülden sonraki üçüncü rakamını alarak bu şekilde devam eder ve yine sonsuz genişlikte yeni bir ondalık sayı elde eder. Bu sayıyı aşağıdaki listede koyu renkte gösterilmiş çapraz rakamlardan oluşturmuştur.

0,**5**738949…
0,2**0**23246…
0,42**1**8654…
0,039**8**716…
0,7770**1**75…
0,34696**7**9…
0,187569**6**…

Bu sayı 0,5018176… olur.

Hilbert, izleyenlerin şaşkın bakışları arasında şu sözleri söyler: Yaptığım listede bulunmayan sayıyı oluşturmak için 0,5018176… sayısının rakamlarını değiştirmem gerekiyor. Bunu da her bir rakama 1 ekleyerek yapabiliriz. Böylece şu sayıyı elde ederiz: 0,6129287…

Alkışlar başlar. Yapılan listede bulunmayan sayının 0,6129287… olduğunu görenler coşkuyla Hilbert'i alkışlıyordur. Hilbert sözlerini sürdürür: 0,6129287… sayısı yaptığım listeye ait değildir. Bu sayı, 1'inci odadaki numara olamaz, çünkü ilk basamağındaki rakam 1'inci odadaki numaranın ilk basamağından farklıdır. 2'inci odada da olamaz, çünkü ikinci basamağı 2'inci odadaki numaranın ikinci basamağından farklıdır. Bunu bu şekilde sonsuza dek sürdürdüğümüzde listede bulunmayan sonsuz genişlikteki bir ondalık sayının mutlaka bulunacağı sonucuna ulaşırız. Pekâlâ, listede ilk yedi basamağı 0,6129287 olan bir sayı bulanabilir, ama bu sayı listede olsa da bizim oluşturduğumuz sonsuz genişlikteki sayı bu sayıdan en az bir basamak bile olsa daha sonraki basamaklarda farklı olacaktır. Bu yüzden, gelen müşterileri sonsuza dek odalara göndermeye devam etsek bile elindeki kartta bizim oluşturduğumuz 0,6129287… sayısını taşıyan müşteri için bir oda bulamayız.

Yolcuları gezdiren rehber, otel yöneticileri, gelen yolcuların odalara yerleşemeyecek olmasından dolayı üzgündürler, ama öte yandan büyük bir olaya tanık oldukları için şanslı olduklarını düşünerek dağılırlar.

Kıssadan Hisse

Otel Hilbert'te sonsuz sayıda oda var, ama yine de (0,1) aralığındaki sonsuz sayıdaki ondalık sayıyla numaralandırılmış, sonsuz sayıdaki yolcuyu odalara yerleştiremiyoruz, hep açıkta kalan birileri oluyor. Oysa daha önce yine sonsuz sayıda yolcuyu aynı otele yerleştirebiliyorduk. Bunun nedeni, büyüklükleri aynı olmayan iki farklı sonsuzlukla karşı karşıya olmamızdır. Hikâyenin son bölümü bize, doğal sayıların "sonsuzluğundan" daha büyük sonsuzlukların olduğunu anlatır. Otel Hilbert'in odaları doğal sayılar kümesinin elemanlarıyla numaralandırılmıştır, (0,1) aralığında bulunan sonsuz genişlikteki ondalık sayılar, daha doğrusu reel sayılar oda numaralarıyla birebir eşlenemez. Cantor, hikâye kahramanımız Hilbert'in kullandığı "çapraz yöntemiyle" doğal sayılar kümesinden daha büyük son-

suzlukların olduğunu göstermiş, sonrasında da "sonsuzun" tek değil çok olduğunu ve bazı sonsuzların bazılarından daha büyük olduğunu keşfetmiştir. Sonsuz kümeleri sayılabilir ve sayılamaz olarak ikiye ayırmıştır. (0,1) aralığındaki reel sayılar kümesinin "sayılamaz", doğal sayılar kümesinin ise "sayılabilir" olduğunu göstermiştir.

Başlangıç adımlarını anlatmaya çalıştığımız Cantor'un bu keşfi, 19. yüzyıl matematiğine damgasını vurmuş, sonrasında da devrim etkisi yaratmıştır. Sonsuzluk artık gözümüzün önündedir, üstelik derecelendirilmiş olarak.

KAYNAK

Bellos, A, *Alex Sayılar Diyarında*, Çev. Köksal Gülerkaya, Pegasus Yayınevi, 2012.

HANGİ ÇÖZÜM DAHA 'ZARİF'?

Matematikle uğraşan hemen herkesin sorduğu bir sorudur: Başka bir yolla çözebilir miyim? Kimi zaman doğru sonucu bulsak bile çözüm yolumuzu beğenmeyip daha basitini, daha estetik olanını ararız. Tıpkı varmak istediğimiz yere zahmetli bir yoldan değil de, hoş sürprizlerle karşılaşabileceğimiz keyifli bir yolculuk sonunda kolaylıkla ulaşmayı istemek gibi. Öğrencilik yıllarında matematik sınavları için klasikleşen "sonucum yanlış ama çözüm *yolum* doğru" ya da "ben sonucu başka *yoldan* buldum" gibi ifadelerde söz edilen *yollar* aslında matematik yapmanın kendisi değil midir? Matematik tam da "yollar" ve bu yollardaki zihinsel yolculuklardır, matematiğin yaratıcılıkla ilişkisi de bu noktadadır. Problem ya da teoreme ilişkin yürütülen muhakemenin gücü ve çeşitliliği, matematiksel bilginin farklı düşünme biçimleriyle kullanılması bu yolların ve yolculukların güzergâhını ve seyrini değiştirir. Elbette çözümün doğruluğudur önemli olan, ama matematikçiler teoremlerin kanıtlarında, problemlerin çözümlerinde "zarafet" ve "güzellik" de ararlar. İngiliz matematikçi G. Hardy'e göre zarif bir çözüm, derinliği, ciddiyeti, genelliği, şaşırtıcılığı, ekonomik olması gibi değerlerle diğerlerinden ayrılır.

Bu yazıda eski ve meşhur bir problemin birbirinden ilginç dört farklı çözümünü yapacağız. "Hangi çözüm daha zarif, Hardy'nin belirlediği değerlere hangisi daha uygun?" sorusunun

yanıtı kendiliğinden ortaya çıkacak. Düşünerek eğlenmek isteyen okura yazının devamını okumayı öneriyorum.

Denizciler, Hindistan Cevizleri ve Maymun Problemi ilk kez 1926'da *The Saturday Evening Post* isimli dergide Ben Ames Williams imzasıyla yayımlanmış, yoğun bir ilgiyle karşılaşmıştır. Dergiye ilk hafta içinde problemin çözümüyle ilgili 2000 okur mektubu yollanmıştır. Amerikalı matematikçi Martin Gardner 2001'de yayımladığı *The Colossal Book of Mathematics* isimli kitabında bu problemin iki farklı çözümünü vermiş ve Williams'ın problemle ilgili 20 yıl boyunca mektup aldığını belirtmiştir.

Denizciler, Hindistan Cevizleri ve Maymun Problemi. Batan bir gemiden kurtulan beş denizci ıssız bir adaya düşerler. Yiyecek olarak sadece hindistan cevizlerinin bulunduğu adada yaşayan tek canlı bir maymundur. Denizciler, hayatta kalabilmek için bütün günü hindistan cevizi toplamakla geçirirler. Hindistan cevizlerinden büyük bir yığın oluşturduklarında hava kararmıştır ve çok yorulmuşlardır; uyumayı ve hindistan cevizlerini sabah paylaşmayı kararlaştırırlar.

Gece denizcilerden biri uyanır, diğer denizcilerin kendisini aldatacağından şüphelenerek kendine ait olan payı almak için hindistan cevizlerini eşit sayıda beş gruba ayırır. Ama bir hindistan cevizinin arttığını fark eder. Bu hindistan cevizini maymuna atar, kendi payına düşen, eşit sayıdaki beş gruptan birini bir köşeye saklar ve uykuya dalar. Biraz sonra ikinci denizci uyanır, onun da içine kurt düşmüştür. O da ilk denizci gibi, bu kez kalan hindistan cevizlerini eşit sayıdaki beş gruba böler, artan bir hindistan cevizini yine maymuna verir, kendi payına düşen eşit sayıdaki beş gruptan birini ayırarak gizler ve uykuya dalar. Gemide yaşadıkları tekinsiz hayat yüzünden güven duygusunu yitirmiş olan diğer denizciler de sırayla uyanır. Üçüncü, dördüncü ve beşinci denizciler de aynı işlemleri yaparlar, her defasında kalan hindistan cevizlerini eşit sayıdaki beş gruba ayırırlar, artan bir hindistan cevizini maymuna verirler, kendi paylarını saklayarak uyurlar. Sabah uyandıklarında da kalan hindistan cevizlerini eşit sayıdaki beş gruba bölerler, (6. kez) yine bir tane artar ve bu hindistan cevizini de maymuna verir-

ler. Tabii, hepsi bir önceki güne göre hindistan cevizi yığının küçüldüğünün farkındadırlar. Ama her biri en az diğeri kadar suçlu olduğundan kimse bir şey söyleyemez. Soru şudur: Denizcilerin bütün gün topladığı hindistan cevizi sayısı en az kaç olabilir?

Birinci Çözüm. Bu çözüm için ilköğretim düzeyinde matematik bilgisi yeterlidir.

Denizcilerin n tane hindistan cevizi topladıklarını varsayarsak,

$$\begin{aligned} n &= 5a+1, \\ 4a &= 5b+1, \\ 4b &= 5c+1, \\ 4c &= 5d+1, \\ 4d &= 5e+1, \\ 4e &= 5f+1. \end{aligned}$$

Bu eşitliklerin her biri başlangıçtan itibaren her defasında kalan son hindistan cevizi sayısını göstermektedir. Denklemlerdeki *a, b, c, d, e*'yi yerine koyma yoluyla yok edersek aşağıdaki denklem elde edilir:

$$1024n = 15625f+11529$$

Bir Diophantine denklemi olan bu eşitlikte n'yi yalnız bırakalım:

$$n = \frac{15625f + 11529}{1024}$$

Bu kesri aşağıdaki gibi parçalarsak,

$$\begin{aligned} n &= 15f + 11 + \frac{265f + 265}{1024} \\ &= 15f + 11 + x \quad (1.1) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte,

$$\frac{265f + 265}{1024} = x$$

aldık. Şimdi de f'yi aşağıdaki gibi yalnız bırakalım:

$$f = 3x - 1 + \frac{229x}{265} \quad (1.2)$$

Burada da,

$$\frac{229x}{265} = y \text{ olsun. Buradan, } \frac{y}{x} = \frac{229}{265}$$

olacağından y, 229'un, x de 265'in tam katı pozitif tamsayılardır. Hindistan cevizi sayısı olan n'nin en küçük değerini aradığımız için x = 265'tir. Bu değeri (1.2)'de yerine yazarsak f=1023 olur. Bu değeri de (1.1)'de yerine yazdığımızda,

$n = 15f+11+x$

$= 15x1023+11+265 = 15621$

bulunur ki bu sayı problemin yanıtıdır.

İkinci Çözüm. Bu kez birinci çözümdeki denklem sistemini modüler aritmetikle çözeceğiz. Ama önce kullanacağımız bazı basit modüler aritmetik bilgilerinden söz edelim:

x ve y tamsayı, m pozitif tamsayı olmak üzere $(x–y)$, m tarafından tam bölünüyorsa x modula m'ye göre y'ye denktir denir ve $x \equiv y(\text{mod } m)$ olarak gösterilir. Örneğin (17–2), 5'e bölünür ve $17 \equiv 2(\text{mod } 5)$ olarak yazılır.

Birinci çözümdeki denklemlerden $4e = 5f + 1$ eşitliğini ele alırsak,

$$4e - 1 = 5f$$
$$5e - (e + 1) = 5f$$
$$e + 1 \equiv 0(\text{mod } 5)$$
$$e \equiv -1(\text{mod } 5)$$

Bu denkliğin her iki tarafını 5 ile çarpalım:

$$5e \equiv -5(\text{mod } 25).$$

Ayrıca birinci çözümdeki denklemlerden $4d = 5e + 1$. Bu eşitlikten $5e$'yi çekip $5e \equiv -5(\text{mod } 25)$ denkliğinde yerine yazalım:

$$4d \equiv -4(\text{mod } 25)$$

4 ile 25 aralarında asal sayılar olduğundan bu denkliği 4 ile sadeleştirebiliriz,

$$d \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 25).$$

Aşağıdaki denklikleri de aynı yolla elde edebiliriz:

$$\begin{aligned}
5d &\equiv -5 (\mathrm{mod}\ 125),\\
4c &\equiv -4 (\mathrm{mod}\ 125),\\
c &\equiv -1 (\mathrm{mod}\ 125),\\
5c &\equiv -5 (\mathrm{mod}\ 625),\\
4b &\equiv -4 (\mathrm{mod}\ 625),\\
b &\equiv -1 (\mathrm{mod}\ 625),\\
5b &\equiv -5 (\mathrm{mod}\ 3125),\\
4a &\equiv -4 (\mathrm{mod}\ 3125),\\
a &\equiv -1 (\mathrm{mod}\ 3125),\\
5a &\equiv -5 (\mathrm{mod}\ 15625),\\
n &\equiv -4 (\mathrm{mod}\ 15625).
\end{aligned}$$

Son denklikte $n + 4$, 15625 ile tam bölünüyor. n'nin en küçük değerini aradığımız için $n + 4 = 15625$, $n = 15621$ bulunur.

Üçüncü Çözüm. Denizcilerin topladığı hindistan cevizi sayısına yine n, her denizcinin sadece sabah aldığı hindistan cevizi sayısına da m diyelim.

Şimdi, ilk denizcinin gizlice kendi payını alıp, artan bir hindistan cevizini maymuna verdikten sonra kaç hindistan cevizi kaldığını aşağıdaki gibi gösterelim:

$$\frac{4}{5}(n-1).$$

Aynı şekilde ikinci denizcinin gizlice kendi payını alıp, artan bir hindistan cevizini maymuna verdikten sonraki hindistan cevizi sayısını ifade edelim:

$$\frac{4}{5}\left[\frac{4}{5}(n-1)-1\right].$$

Bu şekilde devam edersek, üçüncü, dördüncü ve beşinci denizcinin gizlice paylarını aldıktan sonra sabah, son kalan hindistan cevizi sayısı:

$$\frac{4}{5}\left[\frac{4}{5}\left(\frac{4}{5}\left\{\frac{4}{5}\left[\frac{4}{5}(n-1)-1\right]-1\right\}-1\right)-1\right].$$

Denizciler sabah, yine, artan bir hindistan cevizini maymuna

verip, kalan hindistan cevizlerini eşit olarak paylaşıyorlar. Her denizci gece aldığı hindistan cevizlerine ek olarak m tane daha hindistan cevizi alıyor. m sayısı aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$m = \frac{1}{5}\left\{\frac{4}{5}\left[\frac{4}{5}\left(\frac{4}{5}\left\{\frac{4}{5}\left[\frac{4}{5}(n-1)-1\right]-1\right\}-1\right)-1\right]-1\right\}.$$

Bu eşitlikte parantezler açılıp düzenlenirse,

$$m = \frac{4^5}{5^6}n - \frac{1}{5}\left[\left(\frac{4}{5}\right)^5 + \left(\frac{4}{5}\right)^4 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{5} + 1\right]$$

elde edilir. Köşeli parantez içindeki ifadeyi geometrik dizinin terim toplamı formülüyle hesaplayalım:

$$m = \frac{4^5}{5^6}n - \frac{1}{5}\left[\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^6}{1-\frac{4}{5}}\right].$$

Bu ifadede köşeli parantez içindeki kesrin paydasında payda eşitleyip, düzenlemeler yaparsak aşağıdaki eşitliğe kolaylıkla ulaşırız:

$$5^6(m+1) = 4^5(n+4).$$

Bu eşitlikteki m ve n pozitif tamsayı olduğundan (m+1), 4^5'in, (n+4) de 5^6'nın tam katıdır. Denizcilerin topladığı hindistan cevizi sayısı olan n'nin en küçük değerini aradığımızdan n+4 = 5^6 'dır. Buradan da problemin yanıtı olan $n = 5^6-4 = 15621$ sonucunu buluruz.

Dördüncü Çözüm. Öncelikle şu özelliklere sahip A pozitif tamsayılarını bulalım: 1) A ve (A–A/5), 5'e tam bölünsün. 2) Bu ilk özellik A için tam altı kez geçerli olsun. A, altı kez 5'e tam bölündüğünden belirlediğimiz koşullara uyan en küçük A pozitif tam sayısı $5\times5\times5\times5\times5\times5 = 5^6$'dır. Bu koşullara uyan 5^6'dan büyük ilk sayı 2.5^6, daha sonraki sayı ise 3.5^6 olacaktır. O halde A sayılarının tümü 5^6'nın tam katıdır, t tamsayı olmak üzere $A = t.5^6$'dır. Ardışık A sayıları arasında $5^6 = 15625$ fark vardır. Bu fark, problemin yanıtı olan sayıyla (denizcilerin toplayabileceği hindistan cevizi sayısının en küçüğü) bu sayıdan büyük en küçük sayı arasında da aynıdır; çünkü A sayısının sahip olduğu

özellikler denizcilerin toplayabileceği hindistan cevizi sayıları için de geçerlidir. Aradığımız sayı olan, denizcilerin toplayabileceği hindistan cevizi sayısının en küçük değeri n ise toplanabilecek hindistan cevizi sayılarının tümünü $n+t.5^6$ olarak ifade edebiliriz.

Biz, denizcilerin toplayabileceği hindistan cevizi sayısının en küçük değerini arıyoruz, elbette bu değer pozitif bir tamsayı. Peki, problemin çözümü negatif tamsayılar kümesinde yapılabilir mi? Denizcilerin topladığı hindistan cevizlerinin sayısı negatif olabilir mi? Bu soruların gerçek hayatta karşılığı olmadığını biliyoruz, ama sürpriz bir çözüm için fiziksel gerçekleri bir yana bırakıp, denizcilerin topladığı hindistan cevizi sayısını –4 kabul edelim. Neden –4? Çünkü 5'e bölündüğünde 1 kalanını veren (–4 = –5+1) ve bu işlemin (problemin istediği gibi) altı kez tekrarını sağlayan ilk negatif tamsayı –4'tür. Bu sayıyı şöyle genelleştirebiliriz: Denizci sayısının 1 eksiğinin negatif işaretlisi.

Probleme dönersek, ilk denizci uyandığında –4 tane hindistan cevizinin bulunduğu yığınla karşılaşır. –4, 5'e bölündüğünde 1 kalanını verdiğinden, ilk denizci pozitif sayıdaki 1 hindistan cevizini maymuna verir, yığında –5 hindistan cevizi kalır. Daha sonra kendi payı olan –1 hindistan cevizini gizlice bir köşeye saklar ve uykuya dalar. Yığında başlangıçtaki kadar, yine –4 hindistan cevizi kalmıştır. İkinci denizci de uyanıp aynı işlemleri yapar ve yığında yine –4 hindistan cevizi kalır. Bu süreç bütün gece böylece devam eder ve sabah olduğunda, yığında hala –4 hindistan cevizi vardır. Bütün denizciler uyanıp hindistan cevizlerini son kez paylaştıktan sonra da son kalan yığında –4 hindistan cevizi bulunur. Fiziksel gerçekleri dikkate almazsak –4 sayısı problemin istediği tüm koşulları sağlamaktadır. Bu yüzden problemin negatif tamsayılardaki ilk çözümü–4'tür. Denizciler –4 hindistan cevizi toplamış olabilir! Sayı doğrusu üzerinde –4'ün sağında bulunan problemin koşullarına uygun ilk sayı bizim aradığımız sayıdır. Denizcilerin toplayabileceği hindistan cevizleri sayılarının arasındaki farkın 5^6 olduğunu yukarıdaki paragrafta göstermiştik. O halde ilk negatif çözüm olan –4'ün üzerine 5^6 eklediğimizde ilk pozitif çözümü bulmuş oluruz ki, bu sayı da problemin yanıtıdır:

$$-4 + 5^6 = 15621.$$

Oldukça sürpriz bir çözüm. Hindistan cevizi sayısını negatif kabul edip, ilk negatif çözümden en küçük pozitif çözüme geçiyor olmak hayatın pratiğine uymuyor, ama teorik olarak tamamen doğru. Mükemmel bir soyutlama. Matematiği matematik yapan da bu değil mi zaten.

Bu sıradışı çözüm şöyle genelleştirilebilir: Denizci sayısını s, her defasında maymuna verilen hindistan cevizi sayısını m, denizcilerin topladıkları hindistan cevizi sayısını n ile gösterirsek,

$$n = ks^{s+1} - m(s-1)$$

olur. Bu eşitlikte k herhangi bir pozitif tamsayıdır. Problemdeki gibi hindistan cevizlerinin sayısını en küçük değerini bulmak istiyorsak $k = 1$ alırız.

Martin Gardner'in edindiği ilk bilgi, bu çözümün İngiliz fizikçi Paul Dirac'a ait olduğudur. Gardner, emin olmak için Dirac'a bu çözümün kendisine ait olup olmadığını sorar. Dirac ise bu çözümü ünlü matematikçi J. H. C. Whitehead'dan öğrendiğini yazar. Bunun üzerine Gardner aynı soruyu Whitehead'a sorar ve o da çözümü bir arkadaşından öğrendiğini bildirir; çözümün kime ait olduğu belirlenemez.

Denizciler, Hindistan Cevizleri ve Maymun Problemi için verdiğimiz çözümlerin dördü de matematiksel akıl yürütmenin güzelliklerini taşıyor. Bu çözümleri inceleyen her matematik severin çıktığı zihinsel yolculukta keşfetmenin hazzını yaşayacağını sanıyorum. Ama biz bir kez daha soralım: Hangi çözüm daha "zarif"? Dördüncü çözümle ilk üç çözümü karşılaştıralım. Derinliği, şaşırtıcılığı, genelliği, ekonomik olması bakımından dördüncü çözüm kesinlikle daha zarif. Bu sonuçla, belki diğer çözümlerin kalbini kırdık, ama matematik böylesi farklılıklarla daha da güzelleşiyor.

KAYNAKLAR

1) Petkovic, M, *Famous Puzzles of Great Mathematicians*, AMS, 2009.
2) Gardner, M, *The Colossal Book of Mathematics*, W.W Norton & Company, 2001.

YANLIŞ ADRESE GÖNDERİLEN MEKTUPLAR

Bu yazıda klasik bir sayma problemini ele alacağız. Matematik tarihinde ilk kez Nicolaus Bernoulli'nin (1687-1759) sorduğu bu problem iki büyük matematikçi Jacob ve Johann Bernoulli kardeşler tarafından çözülmüştür. Daha sonra Bernoullilerden bağımsız, farklı bir çözüm de Leonhard Euler (1707-1783) tarafından yapılmıştır.

Bu ünlü problemi ve çözümünü vermeden önce kısa bir hikâye anlatmak istiyorum: Aşkların mektuplarla ilan edildiği zamanlarda çapkınlığıyla ünlü bir yazar yaşarmış. Her zaman birden çok sevgilisi olan bu yazar, bir oturuşta tüm sevgililerine mektup yazmaktan çok hoşlanırmış. Bir gün, üç sevgilisine yazdığı üç ayrı mektubu tam zarflara koyacağı sırada durmuş ve düşünmüş; kendisiyle hesaplaşmaya başlamış. O an, yazdığı yalanlar yüzünden hissettiği huzursuzluk daha da büyümüş. Aniden aklına bir oyun oynamak gelmiş. Gözlerini kapatarak üç mektubu üç ayrı zarfa gelişi güzel koyup, postalamış. Bu oyun sayesinde ödeyeceği bedellerle ruhunun arınacağını, yalansız, gerçek bir aşka ulaşacağını umut ediyormuş. Ama öte yandan mektupların yanlış adreslere gitmesi halinde olacakları da kara kara düşünmeye başlamış.

Hikâyenin bundan sonrası bizi ilgilendirmiyor. Ama biz, yazarı ve üç sevgilisini de üzecek olan durumu, yani mektupların üçünün de yanlış adreslere gönderilmesi olasılığını merak ediyoruz. Acaba yazarın sevgililerin üçünün de gerçeği öğrenme olasılığı kaç? Bu olasılığı bulmak oldukça kolay:

Mektupların gönderileceği adresleri *A, B* ve *C* harfleriyle ve bu adreslere yollanacak mektupları da sırasıyla M_A, M_B ve M_C ile ifade edersek, ortaya çıkabilecek bütün sonuçlar aşağıdaki tabloda görülmektedir.

A	*B*	*C*
M_A	M_B	M_C
M_A	M_C	M_B
M_B	M_A	M_C
M_B	M_C	M_A
M_C	M_A	M_B
M_C	M_B	M_A

Görüldüğü gibi M_A, M_B ve M_C mektuplarını *A, B* ve *C* adreslerine 6 farklı şekilde gönderebiliyoruz. Bu 6 farklı durumun 2 tanesinde (griye boyalı olanlar) üç mektubun üçü de yanlış adreslere postalanıyor. O halde hesaplamak istediğimiz olasılık 2/6, yani 1/3 olur.

Gönderilecek mektup sayısını 3'ten 13'e çıkardığımızda aynı problemi yukarıdaki yolla çözmemiz çok çok zor; çünkü bu yöntemin hiçbir matematiksel değeri yok. İşte, yazının girişinde sözünü ettiğimiz asıl problemde, gönderilecek mektup sayısının herhangi bir doğal sayı olması halinde çözümün nasıl yapılacağı soruluyor. Bu sorunun yanıtını merak eden ve matematik yapmak isteyen okura yazının devamını okumasını öneririm.

Problem. Zarflara gözlerimizi kapatarak koyduğumuz k farklı mektubu, k farklı adreste oturan, k kişiye gönderiyoruz. Her mektubun yanlış adreslere gitme olasılığını hesaplayınız.

Çözüm. Hesaplamak istediğimiz olasılığın paydasında $k!$ olduğunu biliyoruz; çünkü k kişi ve k adres var, dolayısıyla k elemanlı bir kümenin elemanlarının eşleşmelerinin sayısı $k!$ olur. Bu toplam $k!$ tane eşleşmenin kaç tanesinde elemanların tümü kendileriyle eşleşmez? Bu soruyu yanıtlamalıyız.

k adet mektubu $M_1, M_2, \ldots, M_k$ ile gösterelim ve mektupların gitmesi gereken doğru adresler de sırasıyla $A_1, A_2, \ldots A_k$ olsun. Eğer M_i mektubu A_j adresine gittiyse $M_i \parallel A_j$ olarak göstereceğiz; eğer M_i mektubu A_j adresine gitmediyse $M_i \nparallel A_j$ olarak yazacağız. Ayrıca aradığımız eşleşmelerin sayısını, yani k mektubun tümünün farklı adreslere gittiği durumların sayısını $S(k)$ ile göstereceğiz.

Artık çözüme başlayabiliriz. Önce M_1 mektubunu A_2 adresine gönderdiğimizi varsayalım, yani $M_1 \parallel A_2$ olsun. Bu koşul altında şu iki durumu ele alarak diğer mektupların tümünü yanlış adreslere yollayalım: Birinci durum, $M_1 \parallel A_2$ ve $M_2 \parallel A_1$; ikinci durum, $M_1 \parallel A_2$ ve $M_2 \nparallel A_1$ olsun. Bu durumlar için $S(k)$'yi inceleyelim.

Birinci Durum: $M_3, M_4, \ldots M_k$ mektuplarının $A_3, A_4, \ldots A_k$ adreslerine her $i \in \{3, 4, \ldots k\}$ iken $M_i \nparallel A_i$ koşuluyla gönderilmiş olduğunu biliyoruz. Bu durumda $M_1 \parallel A_2$ ve $M_2 \parallel A_1$ olduğundan bütün eşleşmelerin sayısı $S(k-2)$ olur.

İkinci Durum: Bu durumda da, $M_2, M_3, M_4, \ldots, M_k$ mektuplarını $A_1, A_3, A_4, \ldots, A_k$ adreslerine her mektup yanlış adrese gidecek şekilde gönderiyoruz; ama burada M_2 mektubunun A_1 adresine gitmediğini kabul ediyoruz, yani $M_2 \nparallel A_1$. Bu durumda $M_1 \parallel A_2$ olduğundan bütün eşleşmelerin sayısı $S(k-1)$ olur.

Birinci ve ikinci durumu birlikte düşünürsek şu sonucu çıkarabiliriz: M_1 mektubunun A_2 adresine gönderilmesi halinde diğer mektupların tümünü yanlış adreslere yollayan eşleşmelerin toplam sayısı $S(k-2) + S(k-1)$ olur.

M_1 mektubunu A_1'e değil, A_2 adresine yolladığımızda da diğer mektupların tümünü yanlış adreslere gönderen eşleşmelerin toplam sayısı yine $S(k-2) + S(k-1)$ olacaktır.

Benzer şekilde M_1 mektubu A_3, A_4, ...A_k adreslerine yollandığında da her bir durum için diğer mektupları yanlış adreslere gönderen eşlemelerin sayısı

$$S(k-2) + S(k-1)$$

olacaktır.

M_1 mektubunun gideceği $k-1$ tane adres olduğuna göre, istediğimiz tüm durumların eşleme sayısı olan $S(k)$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$S(k)=(k-1)[S(k-2)+ S(k-1)].$$

Bu eşitlikte parantezler açılır ve düzenlenirse aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$S(k)-kS(k-1)=-[S(k-1)-(k-1)S(k-2)] \text{ (I)}$$

Ayrıca $R_i=S(i)-i.S(i-1)$ (II) olsun. Bu durumda (I) eşitliği

$$R_i=-R_{i-1}$$

eşitliğine dönüşür. Bu eşitlikte $i = 3, 4, \ldots, k$ seçilirse

$$R_3=-R_2$$
$$R_4=-R_3$$
$$R_5=-R_4$$
$$\vdots$$
$$R_k=-R_{k-1}$$

olur. Bu eşitliklerde, bir alt satırdaki R_3 yerine $-R_2$, R_4 yerine R_2, R_5 yerine $-R_2$ yazılarak devam edilirse $k-1$ adımın sonunda

$$R_k=(-1)^{k-2} R_2$$

eşitliğine ulaşılır. Şimdi bu eşitlikte (II)'deki R_k'yi kullanalım,

$$S(k)-kS(k-1)=(-1)^{k-2} [S(2)-S(1)] \text{ (III)}$$

bulunur.

$$S(1)=0,\ S(2)=1,\ (-1)^{k-2}=(-1)^k$$

olduğunu biliyoruz. Bu durumda (III) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$S(k)-kS(k-1)=(-1)^k.$$

Bu eşitliğin her iki tarafını $k!$ ile bölersek,

$$\frac{S(k)}{k!}-\frac{S(k-1)}{(k-1)!}=\frac{(-1)^k}{k!}$$

olur. Bu eşitlikte $k = 2, 3, 4, \ldots k$ alırsak aşağıdaki k-1 tane eşitliği elde ederiz.

$$\frac{S(2)}{2!} - \frac{S(1)}{1!} = \frac{(-1)^2}{2!}$$
$$\frac{S(3)}{3!} - \frac{S(2)}{2!} = \frac{(-1)^3}{3!}$$
$$\frac{S(4)}{4!} - \frac{S(3)}{3!} = \frac{(-1)^4}{4!}$$
$$\vdots$$
$$\frac{S(k)}{k!} - \frac{S(k-1)}{(k-1)!} = \frac{(-1)^k}{k!}$$

Şimdi, yukarıdaki eşitlikleri taraf tarafa topladığımızı ve tüm sadeleşmeleri yaptığımızı varsayalım. Böylece mutlu sona ulaşıyor ve aşağıdaki eşitliği elde ediyoruz.

$$\frac{S(k)}{k!} = \frac{S(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{(-1)^4}{4!} + \ldots \frac{(-1)^k}{k!}$$

Bu eşitliği biraz daha yakışıklı hale getirirsek

$$\frac{S(k)}{k!} = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots \frac{(-1)^k}{k!}$$

olur. $S(k)$ istediğimiz eşleşmelerin sayısını, $k!$ ise bütün eşleşmelerin sayısını gösterdiği için

$$\frac{S(k)}{k!}$$

kesri hesaplamak istediğimiz olasılıktır. Örneğin yazının girişinde anlattığımız hikâyedeki çapkın yazarın 3 değil 5 sevgilisi olsaydı gönderdiği 5 mektubun hepsinin yanlış adreslere gitmiş olması olasılığı

$$\frac{S(5)}{5!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} = \frac{11}{30}$$

olacaktı.

Şimdi, yazarın sonsuz sayıda sevgilisinin olduğunu ve sonsuz sayıda mektup gönderdiğini varsayalım! Bu durumda yukarıda hesapladığımız olasılık çok ilginç bir sayıya "yakınsar". Eğer k'yi sonsuza götürürsek bu olasılık, matematikte ***Euler*** ya da ***Napier sabiti*** olarak bilinen e sayısının çarpımsal tersine "yakınsıyor". Bu toplamın bu sabite yakınsadığını kanıtlamak ileri düzeyde matematik yapmayı gerektiriyor. Ama bir olasılık sorusundan ***Euler sabitine*** gidiyor olmayı, matematiğin *büyülü* dünyasını anlatan güzel bir örnek olarak görüyorum.

Çözdüğümüz bu problemin birçok farklı düzenlemesi var. Meraklı okurların uğraşacağını düşünerek bu problemlerden birini yazıyorum:

Zarflara gözlerimizi kapatarak koyduğumuz k farklı mektubu, k farklı adreste oturan, k kişiye gönderiyoruz. En az bir mektubun doğru adrese gitme olasılığını hesaplayınız. Bu olasılığın 1/2 den büyük olması için en büyük k sayısı kaçtır?

KAYNAKLAR

1)Petkovic, M., *Famous Puzzles of Great Mathematicians*, AMS, 2009.
2) Nesin, A., *Sayma*, Nesin Yayıncılık, 2009.

DOĞRU ÇÖZÜME 'DOĞRU' DİYEMEMEK!

Bir adam duvardaki bir tabloya bakarak şunları söyler: "Ne kız, ne de erkek kardeşim var, ailenin tek çocuğuyum, ama resimdeki adamın babası, benim babamın oğlu." Adamın baktığı portre kime ait?

Bu mantık bilmecesini, yazarları Marilyn vos Savant ve Leonore Fleischer olan *Beyin Geliştirme* isimli kitaptan alıntıladım. Marilyn vos Savant bu bilmeceyi Amerika'da yayımlanan *Parade* dergisindeki köşesinde sorar ve altına açıklama yapmadan sadece yanıtı yazar. Okurlarından, verilen yanıtın yanlış olduğunu belirten yüzlerce mektup alır. Müthiş bir "itiraz fırtınasıyla" karşılaşır. Okur mektuplarına göre doğru yanıt, adam kendi portresine bakıyordur. Ama Vos Savant, kendi verdiği yanıtın doğruluğunu savunur, okurlarına bilmeceyi bir kez daha çözmelerini önerir. Bir sonraki sayıda da çözümü şöyle açıklar:

"Portrenin karşısında konuşan adamı 'John', portredeki adamı ise 'Bay X' olarak adlandıralım ve cümleyi John'un ağzından bir kez daha söyleyelim: "Ben tek çocuğum ve Bay X'in babası, benim babamın oğludur."

Problemin çözümünü John yapıyorsa şöyle düşünür: Peki benim babamın oğlu kim? Başka kardeşim olmadığına göre bu

yalnızca ben olabilirim! O halde Bay X'in babası benim ve Bay X benim oğlum."

Problemi biz çözüyorsak şöyle düşünürüz: John tek evlatsa ve Bay X'in babası, John'un babasının oğluysa, o zaman Bay X'in babasının John olması gerekir ve eğer Bay X'in babası John ise o zaman Bay X, John'un oğludur."

Vos Savant her iki durumda da adamın kendi portresine değil, oğlunun portresine baktığını ayrıntılı bir şekilde açıklayarak yanlış düşünen yüzlerce okurunu ikna etmeyi başarır.

"Dünyanın en zeki kadını" olarak adını Guinnes Rekorlar Kitabı'na yazdırmış olan Marilyn vos Savant bir magazin dergisi olan *Parade*'de "Marilyn'e Sorun" isimli köşesinde okurların merak ettikleri soruları yanıtlıyordu. Gelen soruların çoğu gündelik hayatla ilgili yukarıdaki mantık bilmecesi gibi sıradan sorulardı.

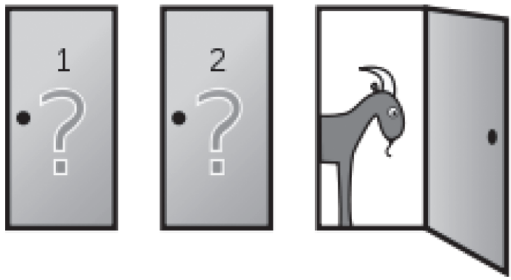
Bir gün, Vos Savant'ın bir soruya verdiği yanıt, fırtınanın da ötesinde, adeta deprem etkisi yaratır. Binlerce eleştiri mektubu gelir. Vos Savant, bu kez, sadece okurlarının değil, hatırı sayılır birçok matematikçinin de şiddetli tepkisiyle karşılaşır.

Bir matematikçi şöyle yazar: "Profesyonel bir matematikçi olarak halkın matematik bilgisinin eksikliğinden çok rahatsızım. Lütfen hatanızı itiraf edin ve ileride daha dikkatli olun." Başka bir matematikçi: "Bu ülkede yeterince matematik cahilliği var ve dünyanın en yüksek IQ'sunun bunu yaygınlaştırmasına ihtiyacımız yok. Utanın!" Bir diğeri: "Hatanızı kabul ederseniz rezil bir durumun çözümüne yapıcı bir katkınız olur. Fikrinizi değiştirmeniz için kaç kızgın matematikçi gerekli?"

Bu problem, popüler matematik meraklılarının çok iyi bildiği ünlü Monty Hall problemidir. Geçmişi 1950'lere uzanır, Marilyn vos Savant'ın 1990'da *Parade*'deki köşesinde yayımlamasıyla yeniden gündeme gelmiştir. Ali Nesin'in de *Matematik ve Oyun* isimli kitabında yer verdiği bu problemden habersiz meraklı okurların da olabileceğini düşünerek, burada bir kez daha ele almayı ve bunca gürültünün sonrasını da aktarmayı istiyoruz.

Monty Hall problemi

Bir yarışma programında olduğunuzu ve üç kapıdan birini seçme hakkınız olduğunu varsayalım. Kapılardan birinin ardında bir araba, diğerlerinin ardında ise keçiler var. Yarışmanın kuralları şunlar: Siz kapıyı seçtikten sonra, kapı hemen açılmaz. Kapıların ardında ne olduğunu bilen sunucu Monty Hall, şimdi geriye kalan iki kapıdan birini açmak zorundadır ve açacağı kapının ardında mutlaka bir keçi olacaktır. Eğer geriye kalan iki kapının ardında da keçi varsa, kapılardan birini rastgele seçecektir. Monty Hall ardında keçi olan kapıyı açtıktan sonra, size ilk seçiminizi değiştirip kalan kapılardan diğerini seçmek isteyip istemediğinizi soracaktır. Düşünün ki Kapı 1'i seçtiniz ve sunucu ardında keçi olan Kapı 3'ü açtı. Daha sonra size "Seçiminizi 2 numaralı kapıdan yana değiştirmek ister misiniz?" diye sordu. Seçiminizi değiştirmek sizin yararınıza mıdır?



Arabayı bulmak için yarışan yarışmacı kapılardan birini, diyelim ki 1'inciyi seçmiş olsun. Sunucu diğer kapılardan birini, diyelim ki 3'ü açar ve arkasında keçi vardır; yarışmacıya 1'inci kapı yerine 2'inciyi seçebileceğini söyler. Bu durumda yarışmacı arabayı kazanma olasılığını artırmak için seçimini değiştirmeli midir? Yoksa değiştirse de değiştirmese de fark etmez mi?

Marilyn vos Savant bu soruya yüzlerce matematikçiyi çileden çıkaracak "değiştirmelidir" yanıtını verir ve ilk olarak şu çözümü yapar: Yarışmacı kapılardan birini seçtiğinde, seçilen kapının ardında araba olma olasılığı 1/3'tür ve araba 2/3 olasılıkla diğer kapılardan birinin ardındadır. Sunucunun ardında keçi olan bir kapıyı açması, yarışmacıya seçtiği kapının ardında ne

olduğuyla ilgili yeni bir bilgi vermez. O kapının ardında araba olma olasılığı hâlâ 1/3'tür. Sunucunun verdiği yeni bilgi, açılan kapının ardında araba olma olasılığının 0/3 olduğudur. Dolayısıyla araba 2/3 olasılıkla hâlâ açılmayan kapının ardındadır. Kapı seçimi değiştirilirse arabayı kazanma olasılığı 2/3'tür, bu nedenle yarışmacı seçimini değiştirmelidir.

9 Eylül 1990 tarihli köşesinde yayımladığı bu çözümün ardından itiraz mektupları yağmaya başlar. Kapı değiştirildiğinde kazanma olasılığının 2/3 değil, 1/2 olduğu savunulmaktadır. Marilyn vos Savant, gönderenler arasında birçok matematikçinin de bulunduğu bu mektupların bazılarını 2 Aralık 1990 tarihli köşesinde yayımlar ve tabloyla ikinci bir çözüm daha yapar: Yine yarışmacının ilk olarak 1'inci kapıyı seçtiğini varsayalım.

Değiştirmezse:

1'inci Kapı	2'inci Kapı	3'üncü Kapı	Sonuç
Araba	Keçi	Keçi	Kazanır
Keçi	Araba	Keçi	Kaybeder
Keçi	Keçi	Araba	Kaybeder

Değiştirirse:

1'inci Kapı	2'inci Kapı	3'üncü Kapı	Sonuç
Araba	Keçi	Keçi	Kaybeder
Keçi	Araba	Keçi	Kazanır
Keçi	Keçi	Araba	Kazanır

Vos Savant, bu çözümün altına şöyle yazar: "Tablolar, yarışmacının seçimini değiştirmediğinde üç sonuçtan birinde, değiştirdiğinde ise üç sonuçtan ikisinde kazanacağını kanıtlıyor."

Bu açıklama da tepkileri dindirmez. Vos Savant'ın çözümü tamamen doğrudur, ama birçok matematikçi sezginin oyununa gelmiş, doğru çözüme "doğru" diyememiştir. Vos Savant, 17 Şubat 1991'de bu konu üzerine yazdığı üçüncü köşe yazısında "Gerçeklik sezgiyle böylesine şiddetli bir çatışmaya girince insanlar sarsıldı." diye yazar ve kendisine gelen binlerce mektubun yüzde doksanının verdiği çözüme karşı olduğunu belirtir. Gönderenin ismini de belirterek gelen mektuplardan alıntılar yapar. Bu mektupların bazılarında asıl keçinin o olduğu ve kadınların matematiğe erkeklerden daha farklı baktıkları iddia edilir.

Vos Savant, sabırla, verdiği yanıtın doğruluğunu açıklamayı sürdürür, üçüncü ve son olarak başka bir yol daha dener: "Sunucu arkasında keçi olan kapıyı açtıktan sonra şovun sahnesine bir UFO'nun indiğini ve küçük yeşil bir kadının belirdiğini hayal edin. Sizin hangi kapıyı seçtiğinizi bilmeksizin, bu kadından açılmamış iki kapıdan birini seçmesi istenmiş olsun. Arabayı bulma olasılığı yüzde ellidir. Ancak bunun nedeni, asıl yarışmacıya sağlanan avantajı, yani sunucunun yardımını, bilmiyor olmasıdır. Eğer ödül 2'inci kapının arkasındaysa, sunucu 3'üncü kapıyı açar; eğer ödül 3'üncü kapının arkasındaysa 2'inci kapıyı açar. Dolasıyla kararınızı değiştirdiğiniz takdirde eğer ödül 2'inci veya 3'üncü kapının arkasındaysa kazanırsınız. Her iki durumda da kazanırsınız! Ama eğer kararınızı değiştirmezseniz, sadece ödülün 1'inci kapının arkasında olması durumunda kazanırsınız."

Bu açıklamanın ardından tepkiler değişmeye başlar, itiraz eden birçok matematikçi yelkenleri suya indirir, sonucu kabul etmek zorunda kalır. Bu sonuç, elbette tüm matematikçileri hiçbir şekilde bağlamaz. Problemin olasılık teorisinde yer alan koşullu olasılık kavramıyla oldukça basit bir çözümü vardır ve bu çözüm Vos Savant'ın soruyu sormasından önce de bilinmekteydi.

Teslim etmek gerekir ki, Monty Hall problemi oldukça kafa karıştırıcıdır. Ama bu hikâyede bana en çarpıcı gelen olay, 20'inci yüzyılın en büyük matematikçilerinden Paul Erdös'ün doğru çözüme itiraz etmesidir. Paul Erdös olasılık teorisiyle ilgili birçok

önemli problemi çözüme kavuşturmuş ünlü bir matematikçidir. Ama Macar matematikçi Andrew Vazsonyi, Erdös'e problemi anlatıp, yanıtın kapıyı değiştirmek olduğunu söylediğinde çok şaşıracağı şu yanıtla karşılaşmıştır: "Hayır, bu imkânsız. Değiştirmekle değiştirmemek arasında hiçbir fark yok." Erdös, uzun bir süre doğru çözüme "doğru" diyememiş, hatta Vazsonyi'ye "Bana neden değiştirmek gerektiğini söylemiyorsun." diye çıkışmış, ancak problemin bilgisayardaki simülasyonunu izledikten sonra yanlış düşündüğünü kabul etmiştir.

Basit bir mantık bilmecesinden tutun da karmaşık matematik problemlerine kadar, önümüze koyulan çözümü anlamak, en az problemi çözmek kadar emek ve çaba gerektiriyor. Zaman zaman bu da yetmiyor, sezgilerimizin oyununa gelerek matematiksel gerçeği gözden kaçırabiliyoruz, hem de bu işin uzmanı olsak bile. Bu bakımdan Monty Hall problemi ve Marilyn vos Savant'ın akıl dolu çabası oldukça ilginç ve öğretici.

KAYNAKLAR

1) Paul Hoffman, *Yalnızca Sayıları Seven Adam*, Çev. Derya Kömürcü, Sistem Yayıncılık, 1999.
2) Marilyn vos Savant, Leonore Fleischer, *Beyin Geliştirme*, Çev. Cem Şen, İm Yayınları, 2000.
3) www.mwsug.org/.../MWSUG-2010-87.pdf

OLASILIK SOHBETLERİ

Olasılık hesaplarının meraklısı iki öğrencinin sabah programındaki son üç ders boş geçmektedir. İki arkadaş kendilerini koyu bir sohbetin içinde bulurlar. Birbirlerine sordukları problemleri tartışırlar, iddialaşırlar… Siz de olasılık problemleriyle uğraşmayı seviyorsanız, onlara katılabilirsiniz.

- Elimde üç kart var. Gördüğün gibi kartların birinin iki yüzü de mavi, ötekinin iki yüzü de kırmızı, diğerinin ise bir yüzü kırmızı bir yüzü mavi renkte. Şimdi bu kartları şapkamın içine koyarak karıştıracağım ve senden bir kart çekmeni isteyeceğim. Ama çektiğin kartın sadece bir yüzüne bakacaksın.
- Peki sonra…
- Sen önce kartı çek, sonrasını söyleyeceğim.
- Tamam çekiyorum.
- Çektiğin kartın görebildiğin yüzü ne renk?
- Kırmızı.
- Pekâlâ, şimdi şöyle bir iddiada bulunacağım: Çektiğin bu kartın iki yüzü de kırmızı. Ne dersin?
- Nasıl bilebilirsin ki? Bu kartın iki yüzü de mavi renkteki kart olmadığını biliyoruz, ama senin iddia ettiğin gibi iki yüzü de kırmızı olan kart olabileceği gibi bir yüzü kırmızı diğer yüzü mavi kart da olabilir. İki durumun da olasılıkları eşit, yani 1/2 değil mi? Yoksa hile mi yapıyorsun?

- Hile olmadığını baştan söyleyeyim. Elbette, çektiğin kartın iki yüzünün de kırmızı renkte olduğunu kesin olarak bilemeyiz. Ama ben, bu kartın iki yüzünün de kırmızı olma olasılığının bir yüzünün kırmızı diğer yüzünün mavi olma olasılığından daha fazla olduğunu düşünüyorum. Senin söylediğin gibi olasılıklar eşit değil. Eğer hala eşit olduğunu düşünüyorsan iddiaya girelim. İddiayı sen kazanırsan bir hafta boyunca öğle yemeklerini ben ısmarlayacağım, kaybedersen de sen. Kabul mü?

- Dur bir dakika… Düşündüm de sen haklısın; çünkü benim çektiğim kart, kımızı-mavi kartın kırmızı yüzüyse ben kazanırım, ama eğer kırmızı-kırmızı kartın bir yüzüyse sen kazanırsın ya da kırmızı-kırmızı kartın diğer yüzüyse yine sen kazanırsın. Benim kazanmam için sadece bir durum varken senin kazanman için iki durum var. Dolayısıyla senin kazanma olasılığın 2/3. Benden iki kat daha şanslısın. Başlangıçta olasılıkların eşit olduğunu söylerken yanıldım. Mavi-mavi kartın bulunmadığını bildiğimizden geriye kalan iki karttan birinin kırmızı-kırmızı kart olacağını düşündüm ve olasılık 1/2 olur dedim. Oysa buradaki durum öyle değil: çekilen kartın mavi-mavi olmadığından daha fazlasını, bir yüzünün kırmızı olduğunu biliyoruz.

- Öğle yemeklerini ısmarlamak korkusuyla kafan ne de güzel çalıştı! Ama kurtulamazsın. Senin de beğeneceğini umduğum bir başka soru var aklımda.

- Anlaşıldı. Bugün senden kurtulmak kolay olmayacak, ama ilk sorunu yanıtladığım için mutluyum. Hadi sor bakalım. İddia yine bir haftalık öğle yemeklerinin bedeli mi olacak?

- Yok, hayır. Bu kez kazanan bir ay boyunca öğle yemeklerini ısmarlayacak.

- Oooo… Sen işi iyice büyüttün, bunun adı resmen kumar. Peki, kabul, sor.

- Biliyorsun en kolay oyun yazı tura oyunudur. Bizim oynayacağımız oyunda parayı üst üste atacağız ve paraların geliş sırasını tahmin edeceğiz. İkimiz de önceden birer üçlü söyleyeceğiz. Örneğin sen kafana göre Yazı-Yazı-Tura üçlüsünü seçiyorsun ben de bir başkasını. Seçilen sıralardan biri gelene kadar yazı tura atacağız. Hangimizin üçlüsü önce gelirse oyunu o kazanacak.

Hem de ilk üçlüyü seçme hakkı da senin. Ne dersin?

- Güzel. Ama ne fark eder ki, para atışında herhangi bir üçlünün gelmesi olasılığı hep 1/8 değil mi? Gelebilecek bütün durumları biliyorsun, sekiz tane, yazmama gerek yok. Bu yüzden uzun vadede ikimizin de kazanma ve kaybetme şansları eşit olmaz mı? Yoksa sen bu oyunu hileli bir parayla mı oynamayı düşünüyorsun?

- Bak, yine çok ayıp ediyorsun. Peki, o zaman senin cebindeki paralardan biriyle oynarız. Ama beni kırıyorsun. Şimdiye kadar hangi oyunda hile yaptım. İyi düşünmeden konuşarak beni suçlama lütfen. İyi düşün. Evet, seçilen herhangi bir üçlünün gelmesi olasılığıyla diğer herhangi birinin gelmesi olasılığı tabii ki aynı. Ama seçilen iki üçlüden hangisinin önce geleceği sorusu bambaşka bir soru; çünkü bu olaydaki olasılıklar birbirine bağlı. Çok konuştum, biraz daha konuşursam bir ay boyunca öğle yemekleri bana zehir olacak. Hadi gel, çıkar parayı, yazı tura atmaya başlayalım. Bir üçlü söyle.

- Bir dakika, bir dakika… Çok acele ediyorsun. Biraz düşüneyim. Yine haklısın galiba. Varsayalım ki ben YYY'yi seçtim, sen o zaman TYY'yi seçersen ben, ilk üç atışta YYY gelirse kazanabilirim, diğer durumların tümünde sen kazanırsın; çünkü ikinci üç atışta bir tura gelmesi halinde senin seçimin olan TYY gerçekleşiyor. Örneğin YYY üçlüsünden önce YTY gelmiş olsun: YTYYY. Bu altı atışta senin seçimin olan TYY beliriyor ve sen kazanıyorsun. Yani YYY seçimini yapan kişi sadece ilk üç atışta,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

olasılıkla kazanıyor. Buna karşılık YYY seçimine karşı TYY seçimini yapan kişinin kazanma olasılığı,

$$1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}.$$

Oldukça yüksek bir olasılık. Seni kurnaz seni… Bana ilk seçim hakkını tanıyarak sen avantajlı oluyorsun. Bunu başlangıçta anlamalıydım.

- Bravo! Tebrikler… Çok iyi bir başlangıç yaptın. Senin YYY seçimine karşılık benim TYY'yi seçmemle 7 / 8 olasılıkla ben kazanıyorum. Tabii ki seçimi ilk yapan kişi eğer TTT derse, ikinci kişi bu kez YTT seçimiyle yine 7 / 8 olasılıkla kazanır. Peki diğer seçimlerdeki olasılıkları nasıl hesaplayacağız?

- Bu çok kolay bir soru değil sanırım. Örneğin ben TTY ile başlarsam seçimin ne olur?

- Ama soruyu ben sormuştum, ortada bir iddia var. İstersen oyuna başlayalım, sen TTY ile başla, benim seçimimi o zaman öğrenirsin.

- Yok. Artık bu oyunu senin koyduğun kurallara göre oynamam; çünkü oyuna ben başlarsam, her zaman sen benden daha yüksek bir olasılıkla kazanacak seçimi yapacaksın.

- Anlaşıldı, bedava öğle yemeği hayalim suya düştü desene. Peki… O zaman, hadi gel birlikte beyin jimnastiği yapalım. Aslında ben de ikinci oyuncunun izleyeceği stratejileri bilmeme rağmen yapacağı seçime göre oyunu kazanma olasılıklarını tam olarak bilmiyorum. Senin TTY seçimine karşılık YTT seçimini yapardım; çünkü TTY üçlüsünden önce ya T ya da Y gelecek. Eğer Y gelirse YTTY olacağından kesinlikle ben kazanırım. Böylece kazanma olasılığım en az 1 / 2 olur ve benim YTT seçimimin ne kadar isabetli olduğu anlaşılır. Eğer senin seçimin olan TTY üçlüsünden önce T gelirse yine kazanma olasılığım var, ama kaç? Bu durumda oyun sonsuza dek uzayabilir.

- Peki, şöyle bulabilir miyiz? Bu kez benim, yani birinci oyuncunun kazanma olasılığını hesaplayalım. Bu olasılığı 1'den çıkararak ikinci oyuncunun yani senin kazanma olasılığını bulabiliriz. Senin YTT seçimine karşılık benim ilk üç atışta kazanmam için TTY, ilk dört atışta kazanmam için TTTY, ilk beş atışta kazamam için TTTTY gelmesi gerekir ve atış sayısını sonsuza dek sürdürdüğümüzü düşünürsek TTTTTY, TTTTTTY… olarak devam edebiliriz. Benim oyunu kazanma olasılığım bu olasılıkların toplamıdır yani,

$$P(TTY) + P(TTTY) + P(TTTTY) + \cdots$$

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots=x.$$

Bu sonsuz toplama, yani benim kazanma olasılığıma x dedim. Şimdi yukarıdaki eşitliğin her iki yanını 1 / 2 ile çarpalım,

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\cdots=\frac{x}{2}.$$

Bu iki eşitliği taraf tarafa çıkarırsak

$$x=\frac{1}{4}$$

bulunur ki senin yani ikinci oyuncunun kazanma olasılığı

$$P(TTY\text{'den önce }YTT)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\text{ olur.}$$

- Çok güzel, bravo! Gördüğün gibi birinci oyuncunun TYY seçimine karşılık, YTT seçimini yapan ikinci oyuncunun kazanma olasılığı yüzde 75.

- Peki, şimdi de birinci oyuncu TYT seçimini yaparsa ikinci oyuncunun yapacağı seçimi söyleyeyim: TTY.

- Yahu sen, ikinci oyuncunun kazançlı çıkacağı seçimi hemen nasıl söyleyebiliyorsun? Bildiğin bir strateji mi var? Yoksa ezbere mi konuşuyorsun.

- Yok, hayır, ezbere söylemiyorum. Bildiğim bir strateji var, ama daha sonra açıklayacağım. Aslında ikinci oyuncunun stratejisi bütün seçimlerin olasılıklarının hesaplanmasına göre belirlenebilir. İstersen diğer durumların olasılıklarını hesaplamaya devam edelim.

- Peki, tamam. Şimdi birinci oyuncunun TYT seçimine karşı TTY seçiminin olasılığını hesaplayalım. Ama nasıl?

- Önce, hesaplamak istediğimiz olasılığı ifade edelim:

$P(TYT\text{'den önce }TTY)=k$.

- Bu durumda TYT üçlüsünden önce T ya da Y gelecek. Eğer T gelirse TTYT olacağından önceki Y atışlarını yok sayabiliriz ve ikinci oyuncu 1/2 olasılıkla kazanır; çünkü T gelmesi olasılığı 1/2.

Şimdi, TYT üçlüsünden önce Y geldiğindeki duruma bakalım. O zaman dizi bozulmuştur, bir daha T gelinceye kadar beklemek gerekir ve bu aradaki atışlarda ikinci oyuncunun kazanma olasılığı 0 dır. İlk gelen T'nin ardından ikinci bir T geldiğinde başlangıçtaki duruma dönmüş olur, bu da bizim hesaplamak istediğimiz olasılığa yani k'ye eşittir. Anlattıklarımı denklemle ifade edersek,

$$k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.k$$

olur. Bu denklemin çözümünden

$$k = \frac{2}{3}$$

sayısı hesaplamak istediğimiz olasılıktır.

- Tamam, çok güzel, ama şu başlangıca dönme durumunu tam olarak anlamadım. Nasıl oluyor, hani şu sonsuz sürekli kesirlerdeki gibi tekrar mı ediyor?

- Evet, aynen öyle. Biz başlangıçta k ile gösterdiğimiz olasılığı hesaplarken TYT üçlüsünden önce T gelirse ikinci oyuncu kazanır demiştik. Eğer Y gelirse ikinci oyuncunun kazanması için yine başlangıçtaki duruma gelmek gerekir ki bu da TT gelmesiyle mümkün. Aslında tekrar etme durumunu ağaç diyagramıyla daha güzel görebiliriz.

- Anladım, ağaç diyagramına gerek yok. Şimdi diğer seçimlerin olasılıklarını hesaplayalım.

- Bence gerek yok; çünkü diğer durumlar bizim incelediğimiz seçimlerin aynadaki görüntüsü. Bu yüzden olasılıkları aynı olur. Şimdi istersen ikinci oyuncunun stratejisini ve kazanma olasılıklarını gösteren bir tablo yapalım.

- Tabloda koyu olarak gösterdiğim ikililere dikkat edersen oyunun stratejisi

I. oyuncunun seçimi	II. oyuncunun seçimi	II. oyuncunun kazanma olasılığı
TTT	Y**TT**	7 / 8
TTY	Y**TT**	3 / 4
TYT	T**TY**	2 / 3
TYY	T**TY**	2 / 3
YTT	Y**YT**	2 / 3
YTY	Y**YT**	2 / 3
YYT	T**YY**	3 / 4
YYY	T**YY**	7 / 8

ortaya çıkıyor. İkinci oyuncu, kendi üçlüsünün son iki atışının rakibinin ilk iki atışı olmasını istiyor; böylece bir sonraki elde ikinci oyuncunun kazanma olasılığı olan durumların yarısını bloke etmiş oluyor. Benzer şekilde ikinci oyuncu kendi üçlüsünün ilk iki atışının rakibinin son iki atışıyla aynı olmamasını istiyor. Aslında bu söylediklerim, tablo tarafından desteklenen sezgisel bir strateji. Hesaplamalarla daha kesin bir strateji bulunabilir.

- Hadi artık yemeğe gidelim, karnım çok acıktı.

- Dur, son bir sorum daha var.

- Yok, hayır. Artık yeni bir soruyla uğraşacak gücüm yok.

- Tamam, zaten çok kısa. Bak, hem bu kez, sen kazanırsan bir yıl boyunca öğle yemeklerini ben ısmarlayacağım, kaybedersen bana sadece bir öğle yemeği ısmarlayacaksın. Ne dersin?

- Yine merakımı gıdıklıyorsun ama artık yemeğe gidelim, yolda anlatırsın.

- Bu soru çok basit, lokantaya gidinceye kadar yanıtlayabilirsin. Soruyu soruyorum: Yine üst üste madeni para atacağız, ilk kez yazı gelinceye kadar. 10 kez attıktan sonra hâlâ yazı gelmemişse sen kazanacaksın, en az bir yazı gelirse ben kazanacağım. Ben kaybedersem bir yıl boyunca, sen kaybedersen sadece bir kez yemek ısmarlayacaksın. Ama istersen bu oyunu bugünden başlamak üzere her gün oynayabiliriz.

- Güldürme beni. Bana $1/2^{10} = 1/1024$ kazanma olasılığımın olduğu bir oyunu oynamayı öneriyorsun. Çok komik.

- Doğru, ama kazandığında kârın çok büyük olacak. Bir yıl boyunca öğle yemekleri için ödeyeceğin toplam parayı hesaplayalım istersen. Bu oyunu seninle her gün oynadığımızı düşünürsek, belki sen aylarca kaybedeceksin, ama bir kez kazandığında kaybettiklerinden çok daha fazlasını alacaksın. Senin bu oyundaki kazanç beklentini hesaplayalım istersen.

- Tamam, yeter artık. Bugün ki öğle yemeğini ben ısmarlıyorum. Yeter ki soru sormayı, hesap yapmayı bırak lütfen.

BANACH'IN KİBRİT KUTUSU PROBLEMİ

Polonyalı matematikçi Stefan Banach, yirminci yüzyılın en önemli matematikçilerinden biri olarak kabul edilir. Modern fonksiyonel analizin kurucularından olan Banach, matematiğe birçok alanda büyük kuramsal katkılarda bulunmuştur. 1945'te, 53 yaşındayken akciğer kanserine yakalanarak yaşamını yitiren Banach, bir matematikçiyi şöyle tanımlar:

"Teoremler arasındaki analojiyi görebilen kişi matematikçidir. Daha iyi bir matematikçi kanıtlar arasındaki analojiyi görür. En iyi matematikçi ise teoriler arasındaki analojiyi görebilendir. Bu mantığı sürdürürsek, büyük matematikçi ise analojiler arasındaki analojiyi kurabilen kişidir."

Banach'ın da belirttiği gibi kuramlar arasındaki analojik bağın keşfi iyi matematikçilerin işi. Biz, bu yazıda birkaç basit olasılık probleminin çözümleri arasındaki analojiye örnekler vermeye çalışacağız.

Kibrit Kutusu Problemine geçmeden önce kolay iki olasılık problemini ele alalım.

Birinci Problem. Bir madeni parayı 7 kez attığımızda 5 kez yazı, 2 kez tura gelmesi olasılığını hesaplayalım.

Parayı 7 kez attığımızda mümkün haller sayısı, saymanın temel ilkesine göre

$$2.2.2.2.2.2.2 = 2^7 = 128$$

olur. 5 yazı, 2 turaya uyan YYYYYTT, YYTYTYY, YYYTTYY… gibi hallerin sayısını ise tekrarlı permütasyon formülünü kullanarak

$$\frac{7!}{2!5!} = 21$$

buluruz. Hesap etmek istediğimiz olasılık 21/128'dir.

İkinci Problem. İçlerinde 5'er bilye bulunan iki torbadan, torbaları rastgele seçerek birer birer bilye çektiğimizi varsayalım. Torbaların seçimi rastgele yapıldığından herhangi bir torbadan bilye seçme olasılığımızla diğerinden bilye seçme olasılığımızın aynı olduğunu kabul ediyoruz. Torbalardaki bilyeleri (toplam 10 tane) gelişigüzel bir şekilde birer birer çekme işlemine başladıktan bir süre sonra torbalardan birinde hiç bilye kalmadığını fark ediyoruz. İşte tam bu sırada, diğer torbada 3 bilye kalması olasılığını hesaplayabilir misiniz?

Bu problem birinci probleme göre daha zor gibi görülebilir. Oysa probleme biraz dikkatli bakarsak, buradaki çözümle birinci problemin çözümü arasındaki analojik bağı kolayca görebiliriz. Çünkü bu problemin, bir madeni paranın 7 kez atılışında, 5 kez yazı, 2 kez tura gelmesi olasılığını hesaplamaktan farkı yoktur. Şöyle ki: Birinci kutudaki bilyeleri "yazı", ikinci kutudakileri de "tura" ile gösterelim. İkinci kutuda 3 bilyenin kalması için, 7 atışta 5 kez yazı, 2 kez de tura gelmesi gerekir. O halde bu sorunun yanıtı da 21/128'dir.

Şimdi, yukarıdaki problemin genelleştirilmiş biçimi olan Kibrit Kutusu Problemini verelim, ama önce küçük bir açıklama: Kibrit Kutusu Problemi, olasılık teorisinin klasik sorularından biridir. Bu problem Banach'a atfedilmiştir, fakat problemi soran ve çözen kişi Banach değildir. Banach'ı keşfeden isim olan Polonyalı matematikçi H. Steinhaus tarafından sorulmuştur. Banach'ın sigara tiryakisi olması yüzünden Steinhaus problemi Banach ile ilişkilendirmiştir.

Kibrit Kutusu Problemi: Dalgın bir matematikçi her birinde n tane kibrit bulunan iki kutu kibrit satın alır. Kutulardan birini sağ cebine diğerini de sol cebine koyar. Kibrite ihtiyacı olduğu zaman bir kutuyu rastgele seçer (eşit olasılıkla) ve içinden bir kibrit kullanır. Bir süre sonra kutulardan birini açtığında kutunun boş olduğunu görür. Bu kutudaki son kibriti kullandıktan sonra boş kutuyu dalgınlıkla cebine koyduğunu fark eder. Diğer kutuda, $k \leq n$ koşuluyla k tane kibrit kalmış olması olasılığını hesaplayabilir misiniz?

Çözüm: Bu problemi çözmek için yukarıdaki ikinci problemin çözümünü genelleştirelim: Matematikçinin sol cebindeki kutunun boş kaldığını varsayalım. Sol cepteki kutuda bulunan kibritleri "yazı", sağ cepteki kutuda bulunan kibritleri de "tura" ile gösterelim. Sağ cepteki kutuda k tane kibrit kalmış olması için n tane yazı, $n-k$ tane tura gelmiş olması gerekir. Bu durumda toplam atış sayısı $n+n-k = 2n-k$ olacaktır. O halde $2n-k$ atışta $n-k$ kez tura gelmesi olasılığını hesaplamalıyız.

$2n-k$ atıştaki mümkün hallerin sayısı saymanın temel ilkesine göre 2^{2n-k} olur. $2n-k$ atışta, n tane yazı, $n-k$ tane turanın geldiği hallerin sayısını tekrarlı permütasyon formülüyle

$$\frac{(2n-k)!}{n!(n-k)!}$$

olarak buluruz. Böylece problemin yanıtı, yani diğer kutuda k tane kibrit kalmış olması olasılığı

$$P_k = \frac{(2n-k)!}{2^{2n-k}n!(n-k)!} \text{ olur.}$$

Yukarıdaki çözüm, bir paranın m kez atılışında r kez yazı, $m-r$ kez tura gelmesi olasılığının hesabıyla analojik bağ kurularak yapılmıştır. Para atışından bağımsız, daha basit bir çözümü aşağıdaki gibi yapabiliriz.

Şimdi, bu problemi şöyle soralım: Matematikçi sol cebindeki kutudan $(n+1)$'inci kibriti almayı denediğinde, sağ cebindeki kutudan $n-k$ kibrit almış olması olasılığı kaçtır?

Soruyu bu şekilde ele aldığımızda, kutulardaki kibrit sayılarını artırabileceğimizi görürüz. Dahası, iki kutuda da sonsuz sayıda kibrit olduğunu varsayabiliriz.

Matematikçinin kibrit aldığı kutuyu rastgele seçtiğini ve $n+n-k = 2n-k$ adet kibrit için $2n-k$ kez deneme yaptığını biliyoruz. Bu denemelerin sol ve sağ cepteki kutular için 2^{2n-k} sonucu vardır. İstediğimiz sonuçlar ise sol cepteki kutudan n, sağ cepteki kutudan $n-k$ adet kibritin seçilmesiyle gerçekleşir. Bu seçimi

$$\binom{2n-k}{n}$$

farklı şekilde yapabiliriz. Böylece hesaplamak istediğimiz olasılık

$$P_k = \frac{1}{2^{2n-k}}\binom{2n-k}{n}$$

olarak bulunur.

Olasılık teorisinin kolay sorularından biri olan Kibrit Kutusu Problemi Binom Dağılımı ve Bernoulli Denemeleri yöntemlerini kullanarak da çözülebilir.

Meraklı okur için bir soru: Yukarıda bulduğumuz P_k olasılığı k'nın hangi değeri için en büyük değerini alır?

KAYNAKLAR

1) Petkovic, M, *Famous Puzzles of Great Mathematicians*, AMS, 2009.
2) Feller, William, *An Introduction to Probability Theory And Its Applications*, Third Edition, Wiley, 1968.

NEWTON'UN *ARİTHMETİCA*'SINDAN BİR PROBLEM

Bu yazıda Newton'un *Universal Arithmetick* kitabından kısaca söz edeceğiz ve bu kitaptaki bir problemi ele alacağız.

Universal Arithmetick ya da kısaca *Arithmetica*, Newton'un ders notlarından oluşmaktadır. Latince yazılmıştır. İlk baskısı 1707'de William Whiston tarafından hazırlanıp yayımlanmıştır. Daha sonra 1720'de İngilizce baskısı yapılmış, 1722'de de John Machin tarafından ikinci Latince baskısı yayımlanmıştır.

Bu baskıların hiçbirinde Newton adı geçmez. Newton, *Arithmetica*'nın yayımlanmasından hiç hoşnut değildir, bu nedenle adının yer almasını reddeder. Whiston'un hazırladığı baskı yayımlandığında, Newton o kadar rahatsız olmuştur ki, tüm kopyaları toplayıp imha etmeyi düşünmüştür.

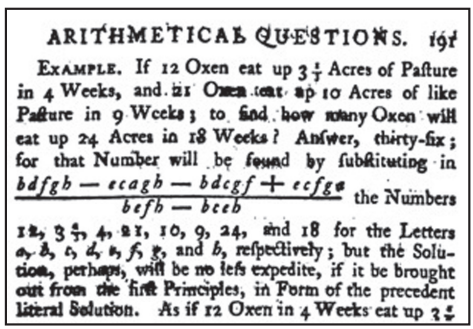
Newton'un çalışmalarını yayımlama konusundaki isteksizliğinin, ilk keşiflerini yayımladığındaki tepki ve eleştirilerden kaynaklandığı düşünülmektedir. 1672'de ilk olarak ışık ve renk üzerindeki buluşlarının yayımlanmasının ardından Hollandalı fizikçi Christiaan Huygens ve İngiliz biliminsanı Robert Hooke tarafından yoğun eleştiri almıştır. Özellikle de

Hooke'yle yazışarak yaşadığı "kavganın" Newton üzerinde bazı garip etkilerinin olduğu iddia edilir. Hooke'nin koparDığı gürültü, bazı biliminsanlarını Newton'un çalışmalarının bilimsel geçerlilikten yoksun olduğu savına iter. Sonrasında haklı çıkan Newton'dur; ama içine eleştirilme ve onaylanmama korkusu yerleşmiştir. Bu korku yüzünden *Opticks*'in yayımını Hooke'nin ölümünden sonraya (keşfinden 30 yıl sonra) ertelemiştir. Bundan sonra, adeta yoğurdu üfleyerek yemeye çalışmış, diferansiyel ve integral hesapla ilgili keşiflerini de yaklaşık yirmi yıl sonra yayımlamış ve bu yüzden Liebniz'le "öncelik savaşına" girmiştir.

Newton, *Arithmetica*'yı belki de içeriği yüzünden yayımlamak istememiştir. *Arithmetica*'da cebirsel notasyon (Newton'un pek de başarılı olamadığı bir alan), geometri-cebir ilişkisi, çeşitli denklemlerin çözümleri, aritmetik problemleri yer almaktadır. İnsanlığın karşısına büyük buluşlarla çıkmış olan Newton, *Arithmetica*'daki konuları yüzeysel bulmuş olabilir. Ayrıca Newton, aynı kitapta, polinom denklemlerin sanal köklerinin sayısını belirleyen bir kural ortaya koymuş, ama kanıtını vermemiştir. Bu teoremin kanıtı yaklaşık 150 yıl sonra James Joseph Sylvester tarafından yapılmıştır.

Yazının bundan sonraki kısmında *Arithmetica*'dan bir aritmetik problemini ele alacağız. Büyük yolculuklar küçük adımlarla başlar... Diferansiyel ve integral hesap gibi çığır açıcı kuramlara ulaşmış bir dehanın uğraştığı aritmetik problemlerinden birini merak edenlere…

Yanda orijinal baskısındaki görüntüsünü alıntıladığımız problemi özgün biçimiyle ele alacağız. Bu yüzden sorudaki arazi ölçü birimini de değiştirmedik. Bir acre yaklaşık olarak 4047 metrekareye eşit.



ARITHMETICAL QUESTIONS. 191

EXAMPLE. If 12 Oxen eat up 3 1/3 Acres of Paſture in 4 Weeks, and 21 Oxen eat up 10 Acres of like Paſture in 9 Weeks; to find how many Oxen will eat up 24 Acres in 18 Weeks? Anſwer, thirty-ſix; for that Number will be found by ſubſtituting in $\frac{bdfgh - ecagh - bdcgf + ecfga}{befh - bceb}$ the Numbers 12, 3 1/3, 4, 21, 10, 9, 24, and 18 for the Letters a, b, c, d, e, f, g, and h, reſpectively; but the Solution, perhaps, will be no leſs expedite, if it be brought out from the firſt Principles, in Form of the precedent literal Solution. As if 12 Oxen in 4 Weeks eat up 3 1/3

Problem. Otların düzenli bir şekilde büyüdüğü ve her yerde aynı miktarda otun bulunduğu bir çayırda, 12 koyun, $3\frac{1}{3}$ acrelik alandaki otları 4 haftada; 21 koyun, 10 acrelik alandaki otları 9 haftada bitiriyor. Otların büyüme miktarını da dikkate alarak 24 acrelik alandaki otların 18 haftada kaç koyun tarafından tüketileceğini hesaplayabilir misiniz?

Çözüm. Problemin genel çözümünü yapacağız. Elde edeceğimiz sonuca göre Newton'un problemini yanıtlayacağız.

Bir acrelik alandaki ot miktarını a, bir koyunun bir haftada yediği ot miktarını b, bir acrelik alanda bir haftada büyüyen ot miktarını da c ile gösterelim.

m_1 koyun, n_1 acrelik alandaki otları t_1 haftada; m_2 koyun, n_2 acrelik alandaki otları t_2 haftada; m koyun, n acrelik alandaki otları t haftada bitiriyorsa aşağıdaki denklemleri yazabiliriz.

$$\begin{aligned} n_1(a+t_1c) &= m_1t_1b,\\ n_2(a+t_2c) &= m_2t_2b,\\ n(a+tc) &= mtb. \end{aligned}$$

Bu eşitliklerden oluşan denklem sisteminde m'yi arıyoruz. Son eşitlikte m'yi yalnız bırakırsak,

$$m = \frac{n}{t}\left(\frac{a}{b}+\frac{tc}{b}\right) \quad (1)$$

olur. İlk iki eşitlikte her iki tarafı b'ye böldüğümüzde a/b ve c/b bilinmeyenler olmak üzere iki bilinmeyenli iki denklem elde edilir. Bu denklem sistemini çözerek (çözümü okura bırakıyoruz) a/b ve c/b değerlerini (1)'de yerine koyarsak,

$$m = \frac{n\left[n_1m_2t_2\left(t-t_1\right)-n_2m_1t_1\left(t-t_2\right)\right]}{tm_1n_2\left(t_2-t_1\right)} \quad (2)$$

bulunur. Şimdi, bu eşitlikte Newton'un probleminde verilen değerleri yerine koyalım:

$$m_1 = 12,\ n_1 = 3\frac{1}{3},\ t_1 = 4$$
$$m_2 = 21,\ n_2 = 10,\ t_2 = 9$$
$$n = 24,\ t = 18$$

değerlerini (2)'de yerine koyduğumuzda $m = 36$ bulunur. O halde, 18 haftada 24 acrelik çayırdaki otlar 36 koyun tarafından tüketilir.

Bu problemi başka yollardan da çözebiliriz. Biz yukarıda Newton'un çözümünü aktardık. Farklı yoldan çözüm yapmak isteyen meraklı okur için ilki kolay, ikincisi görece zor olan iki problem daha veriyoruz.

Problem 1. Otların düzenli bir şekilde büyüdüğü bir çayırda, 10 koyun otların tümünü 20 günde tüketiyor. Aynı çayırda 30 koyun otlasaydı otların tümü 4 günde bitecekti. Otların büyüme miktarını da dikkate alarak, 25 koyunun bu çayırdaki otların tümünü kaç günde tüketeceğini hesaplayabilir misiniz? (Yanıt: 5)

Problem 2. Bir inek, bir keçi ve bir kaz bir çayırda otluyorlar. İneğin tükettiği ot miktarı, kaz ve keçinin birlikte tükettiği ot miktarıyla aynıdır. İnek ve keçi bütün otları 45 günde, inek ve kaz 60 günde, keçi ve kaz 90 günde tüketiyorlar. Otların büyüme miktarını da dikkate alarak, inek, keçi ve kazın birlikte çayırdaki bütün otları kaç günde tüketeceğini hesaplayabilir misiniz? (Yanıt: 36)

KAYNAKLAR

1) Newton, I, *Universal Arithmetick*, Londra, 1769.
2) Petkovic, M., *Famous Puzzles of Great Mathematicians*, AMS, 2009.

SYLVESTER'IN PUL PROBLEMİ

James Joseph Sylvester, 19. yüzyıl İngiltere'sinin en büyük matematikçilerindendir. Dâhice buluşları olan Sylvester, matematiğin birçok dalıyla ilgilenmiş; Yunan ve Latin klasiklerini orijinal kopyalarından okuyup, edebiyat ve müzik üzerine de çalışmalar yapmıştır. Şarkı söylemeye olan düşkünlüğüyle de tanınan Sylvester, matematikle müzik arasındaki bağı şöyle anlatır: "Müzik, hislerin matematiği, matematik de mantığın müziğidir. Müzisyen matematiği hisseder, matematikçi müziği hayal eder. Müzik, rüya; matematik, çalışan hayattır. İnsan zekâsı gelişerek bir Mozart-Dirichlet veya Beethoven-Gauss şeklinde parlayıp öğüneceği zaman bu iki varlığın her biri diğeriyle tamamlanacaktır."

Cebir alanında önemli başarılara imza atan Sylvester, dalgın bir matematikçidir. Sadece diğer matematikçilerin bulduğu sonuçları değil, kendisininkileri dahi hatırlamakta zorluk çektiği zamanlar olmuştur. Bir defasında kendi buluşu olan bir teoremin doğruluğunu kabul etmeyip aksini kanıtlamaya çalışmıştır!

Bu yazıda Sylvester'in hazırladığı sayılar teorisiyle ilgili basit bir problemi ele alacağız.

Pul problemi. Bir pul koleksiyoncusunun elinde değerleri 5 ve 17 lira olan pullardan fazla miktarda bulunmaktadır. Koleksi-

yoncunun, sadece bu iki çeşitten oluşan pullarla **elde edemeyeceği** sonlu sayıdaki en fazla para miktarı kaç liradır?

Çözüm. a ve b negatif olmayan tamsayılar olmak üzere 5 liralık pullardan a tane, 17 liralık pullardan da b tane alarak elde edeceğimiz birleşimdeki pulların değeri $5a+17b$ liradır. Biz, $5a+17b$'nin eşit olamayacağı en büyük doğal sayıyı bulmak istiyoruz. İlk bakışta böyle bir doğal sayının bulunamayacağını, yani $5a+17b$'nin eşiti olmayan sonsuz sayıda doğal sayının olabileceğini düşünebiliriz. Ama problem böyle bir en büyük doğal sayının olduğunu söylüyor. O halde sezgilerimizden önce problemin sesine kulak verelim ve çözmeye çalışalım.

Önce negatif olmayan tüm sayıları beşerli sıra halinde aşağıdaki gibi yazdığımızı varsayalım.

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
...	...	...	...	...

Şimdi, tablodaki sayılar arasında $5a+17b$'nin eşiti olabilecek sayılara bakalım. Bu sayıları 17'nin katı olan sayılara 5'in katlarını ekleyerek elde edeceğiz. Örneğin ilk satırdaki 0 sayısı 17'nin katıdır ve 0'ın sütunundaki bütün sayılar (0, 5, 10, 15…) 0'ın üzerine 5'in katları eklenerek elde edildiğinden $5a+17b$'nin eşitidirler.

Şimdi de dördüncü satır, üçüncü sütunda beliren 17 sayısına bakalım. 17'nin bulunduğu sütunda, 17 ve 17'nin altında kalan bütün sayılar (17, 22, 27, 32…) 17'nin üzerine 5'in katları eklenerek elde edildiğinden $5a+17b$'nin eşitidirler.

Bu şekilde devam edersek 17'nin iki katı olan 34, beşinci sütunda belirir ve o sütunda 34 ve 34'ün altındaki bütün sayılar (34, 39, 44, 49…) 34'ün üzerine 5'in katları eklenerek elde edildiğinden $5a+17b$'nin eşitidirler.

Aynı şekilde 17'nin üç katı olan 51 ikinci sütunda, dört katı olan 68 de üçüncü sütunda belirecektir ve bu sayıların bulundukları sütunlarda bu sayıların altındaki bütün sayılar $5a+17b$'nin eşiti olacaklardır.

Böylece tabloda 17'nin sıfır, bir, iki, üç ve dört katı olan 0, 17, 34, 51 ve 68 sayılarının her biri farklı sütunlarda beliriyor; çünkü 17 ile 5 aralarında asal sayılar (ortak bölenlerinin en büyüğü 1 olan doğal sayılar). Her sütunda bu sayıların altında kalan sayılar $5a+17b$'nin eşiti olabiliyor.

Bu aşamada 68 sayısına dikkatinizi çekmek isterim. 68, tabloda en sonda ortaya çıkan bir sayı ve onunbulunduğu sütunda kendisi ve kendisinin altındaki bütün sayılar $5a+17b$'nin eşiti olabiliyor. O halde tabloda 68'in bulunduğu sütunda 68'in üstündeki ilk sayı olan $68-5=63$ aradığımız sayıdır, yani $5a+17b$'ye eşit olmayan en büyük sayı 63'tür. Pul koleksiyoncusu en fazla 63 liralık bir birleşim elde edemez.

Şimdi, bu çözümü genellemeye çalışalım. Tabloda 17'nin katı olan ilk beş sayıya bir kez daha bakalım:

$$\begin{aligned} 0 &= 17\times(5-5),\\ 17 &= 17\times(5-4),\\ 34 &= 17\times(5-3),\\ 51 &= 17\times(5-2),\\ 68 &= 17\times(5-1). \end{aligned}$$

Problemin sonucu olan 63'ü yukarıdaki eşitliklere göre,

$$\begin{aligned} 63 &= 17\times(5-1)-5\\ &= 17\times5-17-5 \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan da, p ve q aralarında asal sayılar ise problemin genel sonucunun $pq-p-q$ olduğunu söyleyebiliriz. Ama bulduğumuz bu sonucun matematiksel değeri yok; çünkü sezgisel bir yolla sonuca ulaştık. Şimdi, yazının bundan sonraki bölümü için meraklısına diyelim ve matematiksel kanıtın yolundan gidelim. Yukarıdaki $pq-p-q$ sonucunu bir teorem olarak yazalım ve kanıtlayalım.

Teorem. *p* ve *q aralarında asal doğal sayılar, a ve b negatif olmayan tamsayılar ise pa + qb'nin eşiti olamayacak en büyük tamsayı pq–p–q'dur.*

Kanıt. Teoremin kanıtı için şu iki önermenin kanıtlanması yeterli:
1) $pa+qb$ doğal sayısı $pq–p–q$ biçiminde yazılamaz.
2) $pq–p–q$ sayısından büyük her n tam sayısı $pa+qb$ biçiminde yazılabilir.

Birinci önermenin kanıtı. Önermenin olumsuzunu ele alalım,

$$pq - p - q = pa + qb$$

olsun. Bu eşitliği,

$$pq = p\,(a+1) + q(b+1)$$

olarak yazalım. p ve q aralarında asal sayılar olduğundan yukarıdaki eşitliğe göre p, $b+1$'i, q da $a+1$'i böler. Öte yandan $b+1 \neq p$'dir; çünkü aksi takdirde $a < 0$ olur. Benzer şekilde $a+1 \neq q$ olmalıdır. O halde $p < b+1$ ve $q < a+1$'dir, yani $b > p– 1$ ve $a > q–1$. Bu eşitsizliklere göre,

$$\begin{aligned} pq–p–q &= pa+qb \\ pq–p–q &> p(q–1)+q(p–1) \\ pq–p–q &> 2pq–p–q \\ pq &> 2pq \end{aligned}$$

olur ki bu da imkânsızdır. Böylece birinci önermenin olumsuzunun yanlış olduğunu gösterdik.

İkinci önermenin kanıtı. Bir Diyafont denklemi olan $pa+qb = n+p+q$ eşitliğini (a_0, b_0) ikilisinin sağladığını varsayalım. Bu eşitlikte $n > pq–p–q$ eşitsizliğini sağlayan bir n sayısının varlığını göstermeliyiz. p ve q'nun aralarında asal sayılar olduğunu hatırlayalım. Bu denklemin genel çözümü Diyafont denklemlerindeki çözüm teknikleriyle yapılabilir. (Meraklı okurun Diyafont denklemleri hakkında ortalama bilgiye sahip olduğunu varsayıyoruz.)

$$a = a_0 + qt,$$
$$b = b_0 - pt$$

olarak alabiliriz (t tamsayı). $0 \le a < q$ olur. Bu eşitsizlikte a yerine $a_0 + qt$ yazarsak,

$$t < \frac{q - a_0}{q}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$b > b_0 - p\left(\frac{q - a_0}{q}\right) = \frac{a_0 p + b_0 q - pq}{q}$$

$$= \frac{n - (pq - p - q)}{q} > 0$$

olur ki bu da bize istenilen koşula uygun n sayısının var olduğunu gösterir ve $n = p(a-1) + q(b-1) = pc+qd$ eşitliğinin yazılabileceğinin kanıtıdır. (c ve d doğal sayılar)

KAYNAKLAR

1) M. Petkovic, *Famous Puzzles of Great Mathematicians*, AMS, 2009.
2) E. Bell, *Men of Mathematics*, Simon&Schuster, 1986.

EULER ve BİR DİYAFONT DENKLEMİ

18. yüzyılda yaşamış olağanüstü matematikçi Leonhard Euler, insanlık tarihinde eşi benzeri az görülmüş bir dehadır. Yaşadığı yüzyılın son üç çeyreğinde matematikte, matematiksel fizikte ve mekanikte yayımlanmış araştırmaların üçte biri Euler'indir. Onun matematiğe ve genel olarak bilime olan etkisi Shakespeare'in edebiyata olan etkisinden fazla olduğu iddia edilir.

Matematik tarihçisi E. T Bell matematiğin üç büyüğünü Arşimet, Newton ve Gauss olarak sıralamıştır. Aslında Euler, bu listeye dördüncü büyük olarak yazılmalıydı. Ağzından pek az övgü duyulmuş olan Gauss, Euler için şöyle demiştir: "Euler'i okumak matematiğin çeşitli alanlarını öğrenmek için en iyi okuldur ve öyle de kalacaktır. Hiçbir şey Euler'in yerini tutamaz."

Euler, hayatının son on yedi yılını kör olarak geçirmiştir. Hayranlık uyandıran birçok çalışmasını gözlerinin görmediği yıllarda, aklının gördüğüyle gerçekleştirir. Şaka yollu da olsa "Artık dikkatimi dağıtacak daha az şey olacak" diyecek kadar matematiği, görmeye tercih eder. Yüzlerce makaleyi, onlarca kitabı asistanlarına dikte ettirir. Euler'in akıl, sezgi ve tutkuyla yarattığı uçsuz bucaksız evren birçok biliminsanı için ilham kaynağı ve yol gösterici olmuştur. Ünlü Fransız matematikçi Lapla-

ce şu sözleri söylemiştir: "Euler'i okuyun… Euler'i okuyun… O hepimizin ustasıdır."

Euler, meslektaşlarıyla yardımlaşan, uyumlu, alçakgönüllü, saygılı ve iyi yürekli bir insandır. Birçok matematikçinin içinde yer aldığı "öncelik savaşları" veya insafsız eleştiriler karşısında kin duymak ona tamamen yabancıdır. Örneğin Euler'in Maclaurin'den altı yıl önce ortaya koyduğu ünlü toplam formülünü Maclaurin'in yeniden keşfettiği ve formülün bir süre için "Maclaurin toplam formülü" olarak anıldığı dönemde Euler, şikâyet etmek şöyle dursun, itiraz bile etmemiştir. Belki de başkalarının da aynı talihli sonuca ulaşmış olmaları onu mutlu etmiş bile olabilir. Matematik tarihçisi Dirk J. Struik şöyle yazmıştır: "18. yüzyılın kavgacı ve kıskanç matematikçileriyle bir fincan kahve bile içmek istemezdim. Euler hariç tabii."

Leonhard Euler, olağanüstü çalışma kapasitesi ve şaşırtıcı kararlılığının yanı sıra matematik dünyasının yetiştirdiği en büyük algoristlerden biridir. Problemleri karmaşıklıktan kurtarıp kolaylaştırarak çözmesiyle matematikte birçok kuramın kuruluşuna öncülük etmiştir.

Euler'in yüzlerce keşfinden (buluşu da diyebilirsiniz) biri de iki bilinmeyenli doğrusal Diyafont denklemlerinin çözümü için ortaya koyduğu yöntemdir. Bu basit ve akıl dolu yöntemi bir örnek üzerinde anlatacağız. Bir dehanın nasıl akıl yürüttüğünü merak eden okurun ilgisini çekecek olan bu yöntem için ortaokul matematik bilgisinin yeterli olacağını belirtelim. Bu arada, sözünü ettiğimiz Diyafont denklemini de açıklayalım:

a, b, c tamsayılar ve $ab \neq 0$ iken x ve y bilinmeyenleri de tamsayı ise,

$$ax+by = c$$

eşitliğine **iki bilinmeyenli doğrusal Diyafont denklemi** adı verilir.

Euler'in çözüm yöntemini anlatacağımız aşağıdaki denklemde a, b, c, x ve y doğal sayılardır.

Örnek. x ve y negatif olmayan tamsayılar olmak üzere, $31x+21y = 1770$ denklemini sağlayan (x, y) ikililerini bulunuz.

Çözüm. Euler'in yönteminde ilk olarak katsayısı küçük olan bilinmeyen yalnız bırakılır. Denklemden y'yi tecrit edelim:

$$y = \frac{-31x + 1770}{21}.$$

Bu kesirde -31 yerine $-(21+10)$, 1770 yerine $1770 = 84\times21+6$ yazarsak,

$$y = -x + 84 + \frac{-10x + 6}{21}$$

olur. x ve y tamsayı olduğundan,

$$\frac{(-10x + 6)}{21}$$

kesri de tamsayı olmalıdır. Bu tamsayıyı t ile gösterirsek yeni bir Diyafont denklemi elde ederiz:

$$21t+10x = 6.$$

Bu denklemde de Euler yöntemini uygulayalım. Katsayısı küçük olan değişkeni, yani x'i yalnız bırakalım:

$$x = \frac{-21t + 6}{10}.$$

Bu kesirde -21 yerine $-(20+1)$ yazarsak,

$$x = -2t + \frac{-t + 6}{10}$$

olur. x ve t tamsayı olduğundan,

$$\frac{(-t + 6)}{10}$$

kesri de tamsayı olmalıdır. Bu tamsayıyı u ile gösterirsek bir kez daha, farklı bir Diyafont denklemi elde ederiz:

$$t+10u = 6.$$

Şimdi, x ve y'yi u parametresi cinsinden yazalım:

$$t = -10u+6,$$
$$x = -2t+u = 21u-12,$$
$$y = -x+84+t = -31u+102.$$

$31x+21y = 1770$ denkleminde x ve y negatif olmayan tamsayılar olduğundan, $x = 21u-12 > 0$, $y = -31u+102 > 0$,

$$\frac{12}{21} < u < \frac{102}{31}$$

olur. Bu aralıkta tamsayılarının alacağı değerler 1, 2 ve 3'tür.

$u = 1$ için $x = 9$, $y = 71$; $u = 2$ için $x = 30$, $y = 40$; $u = 3$ için $x = 51$, $y = 9$ bulunur.

Böylece Euler'in keşfettiği basit ama etkili metotla, $31x+21y = 1770$ denklemini sağlayan tüm (x, y) ikililerini $(9, 71)$, $(30, 40)$ ve $(51, 9)$ olarak bulmuş olduk.

KAYNAKLAR

1) M. Petkovic, *Famous Puzzles of Great Mathematicians*, AMS, 2009.
2) A. Törün, "Leonhard Euler", *Matematik Dünyası*, Sayı 80.

ESKİ BİR MANTIK BİLMECESİ

Bu yazıda çok bilinen bir mantık bilmecesinin iki çeşitlemesini ele alacağız. Sözünü edeceğimiz mantık bilmeceleri çok eskidir ve o kadar popüler olmuşlardır ki, çoğumuz bu sorularla ilk kez ne zaman karşılaştığımızı anımsamayız bile. Birinci bilmeceyi fazla tanıdık buluyorsanız ve hikâyesinin erkek egemen dünyanın diliyle yazılmış olmasına tepkiliyseniz diğer bilmeceye göz atmanızı öneririm. İkinci bilmece de klasik bir sorudur, ama vereceğimiz çözüm son derece sıradışı ve şık. Öte yandan bu bilmecenin hikâyesinde kadınlar erkeklerin baskı ve dayatmalarına boyun eğmeyecek, kendi kurallarını koyacaklardır.

Birinci Bilmece. Üç güzel kadın ve onların eşleri yaşadıkları sahil kasabasının karşısındaki adaya bir sandalla gitmek isterler. Sandal sadece iki kişi taşıyabilmektedir. Ayrıca kadınların kocaları çok kıskançtır, eğer eşleri başka erkeklerle bir arada olursa aldatılma korkusu yaşadıklarından kendilerinin olmadığı ve diğer erkeklerin bulunduğu bir ortamda eşlerinin kalmasına izin vermezler. Sorumuz şöyle: Bu üç çift, bu koşullarda kasabadan adaya nasıl geçerler?

Çözüm. Problemin koşullarını sıralayalım: Üç evli çift kıyı kasabasından adaya sadece iki kişi taşıyan bir sandalla gideceker. Kadınlar kocalarının olmadığı ve diğer erkeklerin bulunduğu ortamlarda kalamayacaklar. Kadınları *a, b* ve *c,* kocalarını da

sırasıyla *A, B* ve *C* harfleriyle gösterelim. Kasabadan adaya gidişi → sembolüyle, adadan kasabaya dönüşü de ← sembolüyle ifade edelim. Çözüm on bir adımda yapılabilir ve aşağıdaki tablodaki gibidir.

	Kasaba	Sandal	Ada
	ABCabc	-	-
1.	*BCbc*	→ *Aa*	*Aa*
2.	*ABCbc*	← *A*	*a*
3.	*ABC*	→ *bc*	*abc*
4.	*ABCa*	← *a*	*bc*
5.	*Aa*	→ *BC*	*BCbc*
6.	*ABab*	← *Bb*	*Cc*
7.	*ab*	→ *AB*	*ABCc*
8.	*abc*	← *c*	*ABC*
9.	*c*	→ *ab*	*ABCab*
10.	*Cc*	← *C*	*ABab*
11.	-	→ *Cc*	*ABCabc*

Bu çözümden daha kısa bir çözüm vardır. Dokuz adımda sonuçlanan bu çözümü meraklı okurlar kolaylıkla bulabilir.

İkinci Bilmece. Bu bilmecede de üç evli çift bir sahil kasabasının karşısındaki adaya sadece iki kişi taşıyabilen bir sandalla gidecektir. Ama bu kez kadınlar kendi kurallarını koyarlar, kocaları yokken diğer erkeklerin bulunduğu ortamda bulunmamayı kabul etmezler. Kadın dayanışması sonuç verir ve erkeklerin olası baskılarına karşı şu kuralı kabul ettirirler: Her iki tarafta da (kasabada ve adada) kadınlar erkeklerden daha az sayıda olmamalıdır. Ama eğer herhangi bir tarafta hiç kadın yoksa erkeklerden en az biri bulunabilir. Bu altı kişi, bu koşullar altında en az kaç seferde kasabanın karşısındaki adaya geçebilir?

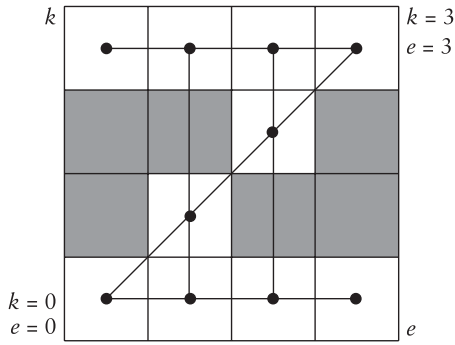
Çözüm. Söz konusu geçiş en az on bir adımda gerçekleşebilir. En uygun geçiş için gereken hamleleri deneme yoluyla bulabiliriz, ama biz 4×4'lük bir matris kullanarak şık bir çözüm vereceğiz.

Kadınların sayısını *k* erkeklerin sayısını da *e* ile gösterelim. *k* ve *e*, 0, 1, 2 ve 3 değerlerini alabilir. Bu durumda ortaya çıkabilecek 4×4 = 16 seçenek vardır. Bu seçenekleri 4×4'lük bir matrise Şekil-1'deki gibi yerleştirelim. Karelerin içindeki bu sayılar sahil kasabasındaki sırasıyla erkek ve kadın sayılarını göstermektedir. Örneğin "2-1" kasabada 2 erkeğin, 1 kadının bulunduğunu gösteriyor. Tabii ki bu durumda adada 1 erkek 2 kadın bulunmuş oluyor.

k				
	0-3	1-3	2-3	3-3
	0-2	1-2	2-2	3-2
	0-1	1-1	2-1	3-1
	0-0	1-0	2-0	3-0
				e

Şekil-1

Bu 16 seçenekten 6 tanesi bizim istemediğimiz durumlardır, yani "her iki tarafta da (kasabada ve adada) kadınların sayısı erkeklerin sayısından az olmamalı" koşuluna uymamaktadır. (Hiçbir kadının bulunmadığı durumlar dışında). İstenmeyen bu 6 durumun gösterildiği kareleri Şekil-2'de griye boyadık.



Şekil-2

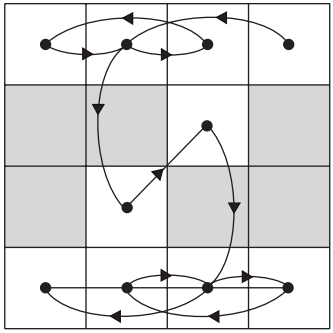
Burada Şekil-1'deki karelerin içindeki sayıların kasabadaki erkek ve kadın sayısını gösterdiğini hatırlatalım ve istenmeyen durumları belirlerken adadaki erkek ve kadın sayısını da dikkate aldığımızı belirtelim. Örneğin Şekil-1'de griye boyadığımız "1-2" karesi bize kasabada 1 erkek ve 2 kadının bulunduğunu gösteriyor, ama bu durumda adada ise 2 erkek, 1 kadın olacağından, yani kadın sayısı erkek sayısından az olduğundan istenmeyen bir seçenektir.

Şekil-2'de griye boyanmayan, kabul edilebilir olan 10 kare içinde hareket ederek problemin çözümünü yapabiliriz. Ama bu hareketleri şu kurallara göre yapmalıyız:

1) Hedefimiz, başlangıç karesi (3-3) olan sağ üst köşeden bitiş karesi (0-0) olan sol alt köşeye bir yürüyüş gerçekleştirmek. Böylece bütün kadın ve erkekler kasabadan adaya taşınmış olacak. Geçtiğimiz bir kareden bir daha geçebiliriz, gri karelerin üstünden atlayarak hareket edebilir, ama gri kareleri kullanamayız.

2) Üzerinden geçebileceğimiz 10 kare var. Bu karelerden sola, sağa, aşağı ve yukarı hareket ederek geçeceğiz. Sandal, kasabadan adaya gidip geri döneceğinden aşağı veya sola olan hareketler yukarı veya sağa olan hareketlere karşılık gelmek zorunda; çünkü aşağı ya da sola olan her adım kasabadan adaya geçişi, yukarı ya da sağa olan her adım da adadan kasabaya geçişi ifade edecek. Örneğin iki kare sola gidersek kasabadan adaya iki kişi taşıyan sandal geri dönerken bir kare sağa gittiğimizde adadan kasabaya bir kişi taşımış olacak. Çapraz gidişlerde ise iki yolcu taşınabilecek.

Şekil-3



Bu kurallara göre sorunun çözümünü yapmak zor değil. Böylece problemin sadece dört çözümünün olduğu görülebilir, yani başlangıç karesinden bitiş karesine belirlediğimiz kurallara göre dört farklı şekilde ulaşabiliriz. Bu dört çözümden biri Şekil-3'te görülmektedir. Meraklı okur diğer çözümleri kolaylıkla bulabilir.

On bir adımda gerçekleşen bu çözümde hareketler Şekil-3'te görüldüğü gibi ilk olarak 3-3 karesinden başlayıp 1-3 karesine gidiyor, ardından 2-3 karesine dönüp ve daha sonra 0-3 karesine giderek devam ediyor. Şekil-3'te oklarla gösterdiğimiz bu hareketleri sıralayalım: (3-3), (1-3), (2-3), (0-3), (1-3), (1-1), (2-2), (2-0), (3-0), (1-0), (2-0), (0-0). Parantez içindeki bu sayılar her adımda kasabadaki erkek ve kadın (sırasıyla) sayılarını göstermektedir. Bu sayıları üçe tamamlayarak her adım için adadaki erkek ve kadın sayısını da bulabiliriz.

Bu çözümü bir de klasik gösterimle ifade edelim:

1. $\rightarrow (e, e)$ **2.** $\leftarrow (e)$ **3.** $\rightarrow (e, e)$
4. $\leftarrow (e)$ **5.** $\rightarrow (k, k)$ **6.** $\leftarrow (e, k)$
7. $\rightarrow (k, k)$ **8.** $\leftarrow (e)$ **9.** $\rightarrow (e, e)$
10. $\leftarrow (e)$ **11.** $\rightarrow (e, e)$.

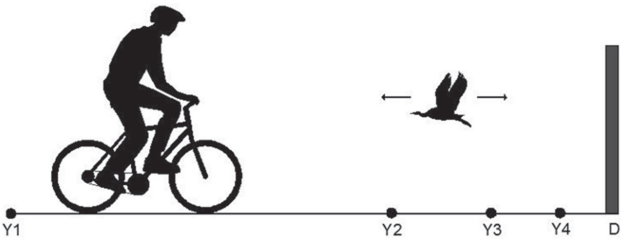
KAYNAKLAR

1) M. Petkovic, *Famous Puzzles of Great Mathematicians*, AMS, 2009.
2) M. Gardner, *The Last Recreations: Hydras, Eggs, and Other Mathematical Mystifications*, Springer, 2007.

PROBLEMİN PÜF NOKTASI!

Birçok çeşitlemesi olan meşhur bir hikâyedir: Ünlü Macar matematikçi John von Neumann'a lise öğretmeni aşağıdaki problemi sorar ve çözümü akıldan yapmasını ister.

Problem. Bir bisikletli dakikada 30 metre hızla 900 metre uzaklıktaki duvara doğru hareket ediyor. Aynı anda bisikletin ön lastiğinin üzerinde duran bir kuş bisikletlinin izleyeceği yoldan dakikada 50 metre hızla duvara doğru uçmaya başlıyor. Kuş duvara ulaştığında geri dönüp geldiği yoldan bisikletliye doğru uçuyor ve bisikletliyle karşılaştığında tekrar geri dönerek duvara doğru uçuyor. Bu şekilde duvarla bisikletli arasında uçmaya devam ediyor, taa ki bisikletliyle duvar arasında kalıncaya kadar.



Şekil 1.

Soru: Kuş toplam kaç metre uçmuştur?

Neumann'ın bu soruyu bir dakikadan kısa bir sürede yanıtlaması üzerine öğretmen, "Bravo! Demek ki problemin püf noktasını buldun" sözleriyle şaşkınlığını anlatır. Neumann, "Anlamadım, ne dediniz, püf noktası mı? Ben sadece sonsuz toplamı hesapladım." karşılığını verir.

Öğretmenin Neumann'dan beklediği püf noktası olan basit çözüm için ortaokul matematik bilgisi yeterlidir. Ama Neumann, matematiksel analizin temeli sayılan serileri kullanarak müthiş bir hızla bir sürü işlemi kafadan yaparak sonuca ulaşmıştır. Ne zaman, basit bir çözümü olan bir soruyu uzun yollardan çözsem bu hikâye gelir aklıma. Tabii ki kendimi Neumann'la karşılaştırmadan…

Bu kısa hikâye, büyük bir olasılıkla kurmacadır, ama bizi ilgilendirmiyor; çünkü anlatılmak istenen Neumann'ın ne denli hızlı işlem yaptığının ötesinde, bir problemin çözümünün matematiksel değerinin salt uzunluğuna ya da kısalığına bağlı olmadığını gösterir. Önemli olan yapılan işin doğruluğudur; üstelik basit yolu göremeyip, karmaşık bir yöntemle çözümü yapan kişi büyük bir matematikçi de olabilir. Elbette, matematikçiler için çözümün ekonomik olması önemlidir, ama niteliği belirleyen derinlik, genellik gibi ölçüler de vardır.

Problemin basit çözümündeki püf noktayı bulmak oldukça kolay: Bisikletin duvara ulaşma süresi 900/30 = 30 dakikadır. O halde kuş da toplam 30 dakika uçacak ve hızı dakikada 50 metre olduğundan toplam 50×30 = 1500 metre yol kat edecektir.

Problemin diğer çözümünü de vereceğiz, ama önce birkaç cümleyle hikâye kahramanının işlem hızından söz edelim:Von Neumann 20. yüzyılın en parlak zihinlerinden biri olarak kabul edilir. Öğretmenliğini yapmış olan ünlü matematikçi George Polya, O'nun hızını şöyle anlatır: "Şimdiye dek gözümü korkutan tek öğrencim. Öylesine hızlı ki… Bir teoreme gelmiştim ve bunun henüz kanıtlanamadığını, kanıtının da zor olabileceğini söylemiştim. Beş dakika sonra elini kaldırdı. Ona söz verdiğimde tahtaya giderek kanıtı yazmaya başladı. O andan sonra Neumann'dan korkmaya başladım."

Soyut ispatları ve numerik hesaplamaları hızla yaptığı bilinen

Neumann'ın asıl hoşlandığı ve gurur duyduğu özelliği sayılara olan yeteneğidir. Bu yeteneğiyle ilgili bir hikâye de şöyledir: Alan Turing ile birlikte bilgisayarın babası sayılabilecek iki kişiden biri olarak kabul edilen Neumann, arkadaşıyla bir bilgisayarı ilk ön test aşamasından geçirmek isterler. Arkadaşı, 2'nin kuvvetlerinin kullanılmasını önerir. Bu öneri şöyle bir şeydir: sağdan dördüncü ondalık basamağı 7 olan en küçük 2'nin kuvveti nedir? Bu soru günümüzdeki bilgisayarlar için son derece küçük bir problemdir, sadece saniyenin küçük bir bölümünde sonuç alınır, ama 1950'lerin teknolojisiyle üretilmiş lambalı bilgisayarlardan biri test edilmektedir. Makine ve Neumann aynı zamanda başlarlar. Neumann işlemi önce bitirir.

Neumann'ın matematiksel işlemlerdeki müthiş hızını konu alan bir çok hikaye vardır. Ama biz asıl hikâyeye dönelim ve onun bir çırpıda, kafadan yaptığı işlemleri anlatarak Bisikletli ve Kuş probleminin diğer çözümünü verelim:

Problemin genel çözümünü yaparak kuşun uçtuğu süreyi hesaplayacağız. Bisikletlinin ve kuşun hareket ettiği noktayı Y_1 ile duvarın bulunduğu noktayı da D ile gösterelim. (Şekil 1) Y_1 ile D arasındaki mesafeyi S ile, bisikletlinin hızını v_B, kuşun hızını da v_K ile gösterelim. ($v_B > v_K$)

Bisikletliyle kuş ilk kez t_1 zamanında Y_2'de karşılaşsınlar. Bu süre içinde bisikletli Y_1'den Y_2'ye gelirken, kuş da duvara gidip Y_2'ye dönüyor. Bu cümleyi denklemle ifade edersek,

$$t_1 v_K + t_1 v_B = 2S \quad (1)$$

olur.

Benzer olarak ikinci karşılaşma, bisikletli ve kuşun Y_2'den hareketinden t_2 zaman sonra gerçekleşiyorsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$t_2 v_K + t_2 v_B = 2(S - t_1 v_B) \quad (2)$$

(1) denklemini (2)'de yazarsak,

$$t_2 v_K + t_2 v_B = t_1 v_K - t_1 v_B \quad (3)$$

olur.

Benzer şekilde t_3 zamanı için aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$t_3 v_K + t_3 v_B = 2(S - t_1 v_B - t_2 v_B) \quad (4)$$

(1) ve (3) denklemlerini (4)'te yazarsak,

$$t_3 v_K + t_3 v_B = t_2 v_K - t_2 v_B$$

olur. Bu şekilde devam edilirse t_i zamanı için,

$$t_i v_K + t_i v_B = t_{i-1} v_K - t_{i-1} v_B$$

denklemini elde ederiz.

$L = (v_K - v_B) / (v_K + v_B)$ alınırsa $t_i = L\, t_{i-1}$ olur. Bu eşitlikte *i*'ye 1, 2, 3… *i* değerleri verilerek elde edilen eşitlikler taraf tarafa çarpılırsa,

$$t_i = L^{i-1}\, t_1$$

bulunur. Bu eşitliğe göre kuşun *i*'ninci zamanın sonuna dek toplam uçma süresi,

$$t_1 + t_1 L + t_1 L^2 + t_1 L^3 + \ldots t_1 L^{i-1}$$

olur. Bu toplam geometrik bir dizinin ilk *i* terim toplamıdır. Bu toplamda *i*'yi sonsuza götürürsek kuşun duvar ile bisikletin ön tekerleği arasında kalıncaya dek uçma süresini buluruz, çünkü L<1 olduğundan elde ettiğimiz toplam ilk terimi t_1, ortak çarpanı *L* olan yakınsak bir geometrik seridir. Bu serinin sonucu limit hesabıyla,

$$\frac{t_1}{1 - L}$$

bulunur. Bu kesirde *L* yerine $(v_K - v_B) / (v_K + v_B)$ yazılırsa,

$$\frac{t_1 v_K + t_1 v_B}{2 v_B}$$

elde edilir. Bu kesrin payında (1) denklemini kullanırsak kuşun uçma süresini,

$$\frac{S}{v_B}$$

olarak bulmuş oluruz ki, bu kesri kuşun hızıyla çarptığımızda kuşun kaç metre uçacağı hesaplanır.

Bu sonuç, problemin püf noktası olan, bisikletlinin duvara ulaşma süresiyle kuşun uçma süresinin eşit olduğunu doğrulamaktadır.

Öyleyse onca işlemi neden yaptık? Bu soruyu matematiği sadece anlık soru(n)ları çözmenin bir aracı olarak görürsek yanıtlayamayız. Tüm bilim dalları ve teknolojideki gelişmeler, böylesi uzun işlemlerle uğraşan matematik çabasının ortaya koyduğu genellemeler sayesinde mümkün olmaktadır. Kısacası kuşun uçtuğu mesafeyi basit bir hesapla kolaylıkla bulabiliriz ama insanın kuş gibi uçabilmesini sağlayan tüm hava araçlarının yapılabilmesinin yolu matematiğin uzun işlemleri ile vardığı bu genellemelerden geçer.

KAYNAK

1) Petkovic, M, *Famous Puzzles of Great Mathematicians*, AMS, 2009.

PROBLEM ÇÖZMEK GÜZELDİR!

Ünlü bilimkurgu yazarı Isaac Asimov bir yazısında tarih öncesinden iki insanın diyaloguna yer verir: Tarih öncesi "dâhi"lerinden biri arkadaşına "Bak şimdi" diyerek şu soruyu sorar: "Diyelim ki iki tane taş bıçağım var. Bunları iki kişiye eşit olarak paylaştırabilirim. Bir tane daha taş bıçağım olsa paylaştıramam, ama bir tane daha olsa iki kişiye eşit sayıda dağıtabilirim. Bu tür şeyler sonsuza dek devam edebilir mi sence?" Arkadaşı bu soruyu hiç beklemiyordur, şaşkınlıkla şöyle yanıtlar: "Kime ne yahu? Niye bölüştürüyorsun bıçakları hem? Al eline bir şeyler avla işte. İşe yarar bir şey yap!"

Asimov'un kurguladığı bu diyalogla ilk insanın matematiğe nasıl başlayabileceğini hayal ediyoruz. Günlük hayatın içinde kullanımı bulunmayan bir problemi çözmeye çalışıyor ilk insan, daha doğrusu ilk "dahi" insan. "İşe yarar mı?" kaygısı taşımadan, sadece merak ettiği için, eğlencesine uğraşıyor bu problemle. Bir bulmacayı çözerken, bir oyunu nasıl kazanabileceğimizi düşünürken de böylesi saf ve soyut bir çaba içinde oluruz, eğer düşünmenin büyüsüne kaptırmışsak kendimizi dünya umurumuzda değildir o an.

Birçok oyun, bulmaca ve popüler matematik probleminde matematiksel araştırmanın ipuçları vardır. Karşılaştığımız sorunun türü ne olursa olsun, "Nasıl çözebilirim?" sorusunu yanıt-

lama uğraşısı matematiksel düşünceyi içerir, sorunun kurgusu içinde bir keşfe çıkarız adeta. Matematik tarihine baktığımızda, birçok popüler matematik ve mantık probleminin matematiksel teorilerin işaret fişekleri olduklarını görebiliriz.

Bu yazıda bazı basit popüler matematik ve mantık problemlerine yer vereceğiz. Soruların çözümü için gerekli matematik bilgisinin ilköğretim düzeyinde olmasına dikkat ettik; hatta matematik bilgisi gerektirmeyen, salt akıl yürütmeyle çözülebilecek problemleri de ele aldık. Ayrıca soruları ilginç olabileceğini düşündüğümüz kısa hikâyelerle anlatmaya çalıştık. Umarım meraklı okur bu soruların içine dalarak hem eğlenebilir, hem de problem çözme gücünü test edebilir. Problemlerin çözümünü "Yanıtlar" bölümünde veriyoruz. Kolaylıklar…

Gazoz kapakları

Yeğenim Fırat çocukluğunda gazoz içmeyi çok severdi. Onun gazoz içmesini izlemek benim için büyük bir zevkti. Bir yudum aldıktan sonra şişeyi kaldırıp bakar, bir yudum daha alırdı. Yüz ifadesinden şişedeki gazozun hiç eksilmemesini istediğini anlardım.

O günlerde bir gazoz firmasının düzenlediği kampanyada, 4 adet gazoz kapağı getirene 1 adet gazoz ücretsiz veriliyordu, ama bu kampanya kısa sürede sona ermişti.

Fırat, yeni bir kampanyanın düzenlenebileceğini düşünerek yeniden kapak biriktirmeye başlamıştı.

Bir gün sevinç içinde koşarak yanıma geldi, yeni kampanyanın haberini veriyordu. Yine 4 adet gazoz kapağı getirene 1 adet gazozun ücretsiz verildiğini ve kendisinin tam 149 kapak biriktirdiğini söyledi.

Hemen sordum: "Peki, bu 149 kapakla en fazla kaç gazoz içebilirsin?"

Sorumu birkaç dakika sonra yanıtlamıştı. Siz de 149 kapakla en fazla kaç gazoz içilebileceğini bulabilir misiniz?

Barmen kokteyl hazırlıyor

"Her zamankinden mi istersiniz?" sorusuna "Evet, her za-

mankinden" yanıtını alan barmen, dolaptan iki şişe çıkarır. Birinin içinde 1 litre vermut, diğerindeyse yarım litre cin vardır. Cinin bulunduğu şişeye yarım kadeh vermut koyar ve şişeyi güzelce çalkalar. Daha sonra bu şişeden yine yarım kadeh karışımı vermutun bulunduğu şişeye doldurur. Haliyle başlangıçtaki gibi vermutun bulunduğu şişe yine 1 litre, diğer şişe ise yine yarım litre karışımla doludur.

Barmenin yaptığı bu işlemlerin sonunda vermut şişesindeki cin, cin şişesindeki vermuttan daha mı fazladır? Yoksa daha mı az? Yoksa eşit midirler?

Öğrencilerin son şansı

Sınıfın en yaramaz üç öğrencisi matematik öğretmenine yaptıkları şaka yüzünden okul idaresi tarafından cezalandırılmak üzeredir. Ama matematik öğretmeni öğrencilerinin cezalandırılmasını istemez; çünkü üç öğrenci de matematik dersinde çok başarılıdır. Öğretmen okul müdürüne bir öneride bulunur: "Onlara sizin yanınızda bir soru soracağım, eğer soruyu doğru yanıtlarlarsa ceza vermeyelim. Ne dersiniz?" Müdür bu öneriyi kabul eder ve hemen öğrencileri odasına çağırır.

Öğretmen öğrencilerine güvenmektedir. Onlara şunu söyler: "Çocuklar, size bir şans tanımak istiyoruz. Elimde 3 kırmızı, 2 mavi kart var. Siz görmeden sırtınıza bir kart iğneleyeceğim. Kendi sırtınızdaki kartı asla bilmeyeceksiniz, ama tabii ki birbirinizin sırtındaki kartları görebileceksiniz. Kendi sırtındaki kartın rengini bileni cezalandırmayacağız." Öğretmen bu sözlerin ardından öğrencilerin hepsinin sırtına birer kırmızı kart iğneler ve teneffüs bitimine kadar herkesin kendi sırtındaki kartın rengini söylemesi gerektiğini bildirir.

Bu durumda üç öğrenciden kaçı ceza almaz, nasıl?

Lewis Carroll problemi

Halis'in hobisi olasılık problemleridir. Yıllardır bu soruların peşinden gitmiş, nerede bir olasılık problemi görse çözünceye kadar uğraşmıştır. Arkadaşları Halis'in bu özelliğini bildiklerinden çözemedikleri olasılık sorularını hep ona sormuşlardır.

Halis'in en yakın arkadaşı Muhlis'tir. Muhlis bir gün, yine bir olasılık probleminin çözümünü öğrenebilmek için Halis'i telefonla arar:

Halis, sana şimdi soracağım soru *Alice Harikalar Diyarında* kitabının yazarı olan matematikçi Lewis Carroll tarafından hazırlanmış. Eminim, çok hoşuna gidecek.

Çok ilginç, Lewis Caroll matematikçi miymiş? Bilmiyordum. Haydi sor, çok merak ettim.

Peki, soruyorum: Bir torbanın içinde tek bir top var. Bu topun rengini bilmiyoruz, ama onun bize siyah veya beyaz olabileceği söyleniyor. Torbaya beyaz bir top atıyor ve karıştırıyoruz. Sonra torbadan gelişigüzel bir top çekiyoruz, bakıyoruz ki top beyaz. Torbada kalan diğer topun beyaz olma olasılığı kaçtır?

Çok güzel bir soru, ama 1/2 dememi beklemiyorsundur sanırım.

Elbette beklemiyorum. Senin gibi bir ustanın böylesi bir yanlış yapmayacağını çok iyi biliyorum.

Biraz bekle, telefonu kapatma lütfen, hesaplıyorum.

Halis birkaç dakika içinde doğru yanıtı verir. Bu soruyu siz de yanıtlayabilir misiniz?

İşçi biliyor şef şaşırıyor

Rulman yapımında kullanılan bilyeleri üreten bir atölyede bir günde, her biri tamı tamına 1 gram ağırlığında olan 600 adet bilye üretilmektedir. Bu bilyeler her birinde 100 adet bilye bulunan 6 kutuya koyularak rulman fabrikasına gönderilir. Atölyede sadece bilyeleri tartan, miligramların kesirlerine kadar ölçüm yapabilen hassas tartılar vardır.

Bir gün, atölyedeki makinelerin ayarlarındaki sapma yüzünden 100 adet bilyenin hatalı üretildiği belirlenir. Aynı kutuya koyulduğu anlaşılan bu bilyelerin her birinin ağırlığı 1 miligram fazladır. Altı kutu içinde ağırlığı fazla olan kutunun tartım yapılarak acilen saptanması gerekir.

Korkmaz adındaki atölye şefi paketleme işlemini yapan Sönmez adındaki işçiyi yanına çağırarak, her kutudan bir adet bilye almasını ve toplam 6 tartım yaparak ağırlığı fazla olan bilyeyi,

dolayısıyla da hatalı bilyelerin bulunduğu kutuyu belirlemesini ister.

Sönmez, tartım yapacağı bölüme doğru yürürken bir anda 6 tartım yapmaya gerek olmadığını anlayarak geri döner ve şefe şöyle seslenir: "Şef, 6 tartıma gerek yok, hatalı bilyelerin bulunduğu kutuyu tek tartımla saptayabiliriz."

Şef şaşırmıştır, merakla sorar: "Bu işi nasıl yapacaksın?"

"Şöyle yapacağım: Önce kutuları 1'den 6'ya kadar numaralandıracağım. Sonra ilk kutudan 1 bilye, ikinciden 2, üçüncüden 3, dördüncüden 4, beşinciden 5, altıncıdan 6 bilye alacağım. Bu 21 bilyeyi tartdığımda, sonuç 21 gramdan fazla çıkacak. Eğer fazlalık *n* gram ise bu *n* sayısı hatalı bilyelerin bulunduğu kutunun numarasıdır."

Şef, Sönmez'i hayranlıkla dinlemiştir. "Bravo, senin ne kadar akıllı olduğunu biliyordum, ama böylesi parlak bir düşünceyi beklemiyordum doğrusu." diyerek tebrik eder. Bir hafta sonra atölyede yeni bir üretim hatası daha yapılır. Bu kez sorun öncekinden daha çetrefillidir. Şef, hemen Sönmez'i çağırır:

"Yine hatalı üretim yapmışız ve hatalı bilyeleri nasıl paketlediğimizi bilmiyoruz. Bu kez kutulardan herhangi biri, belki hepsi birden, her biri 1 miligram fazladan ağırlığa sahip hatalı bilyelerle dolu olabilir. Hatalı bilyelerin bulunduğu kutuyu ya da kutuları hemen saptamalıyız. Bu işi nasıl yaparız? Herhalde bu kez 1 tartımda sonuca ulaşamayız."

Sönmez, gözlerini kısıp, başını yukarıya doğru kaldırarak bir süre düşündükten sonra "Buldum" diyerek çözümü açıklar.

Sönmez hangi çözüm yolunu bulmuştur?

Biyologları telaşlandıran bakteri

Aylardır bir bakterinin çoğalmasını inceleyen asistan bir biyolog yaptığı araştırmanın sonunda heyecan içinde hocasına şöyle seslenir:

"Hocam, incelediğim bakterinin tüm özelliklerini keşfetmiş bulunuyorum. Bu bakteri her saat sonunda kendisinin 5 kopyasına bölünüyor ve her kopya anında orijinal boyutuna erişiyor.

İnanamıyorum! Tek bir bakteri bir saat sonunda 5, bir saat daha geçerse 25, bir sonraki saatin sonunda 125 bakteriye ulaşıyor ve böylece devam ediyor. Bakın, şu cam kavanoza dün 1 adet bakteri bırakmıştım. Az önce kavanoz tamamen doldu. Kavanozun dolma süresi tam 20 saat."

Hocanın "Çabuk antibakteryel ilacı getir, yoksa laboratuvarı bakteriler basacak" diye telaşlanması üzerine, asistan hemen kavanoza ilacı dökerek bakterilerin çoğalmasını durdurur.

Bakterilerin çoğalmasının durduğundan emin olduklarında ikisi de sakinleşmiş, konu üzerine konuşmaya başlamışlardır. Bu sohbet sırasında hocanın kafasına bir soru takılır: "Kavanozun bakterilerle tamamen dolma süresi 20 saat ise acaba kavanozun 1/5'i tam dolduğunda kaç saat geçmiştir?"

Asistan bu soruyu kolayca yanıtlar: "Zamanı sondan başa doğru ele alalım. Eğer kavanoz 20 saatte dolmuşsa 1/5'i 19 saatte dolmuş demektir."

Bu yanıt hocanın çok hoşuna gitmiştir. Biyolojik araştırmayı bir kenara bırakıp, bir soru daha sorar: "Peki, sen diyelim ki kavanoza 1 yerine 5 bakteri koydun. Bu durumda kavanozun 1/5'i kaç saatte dolar?"

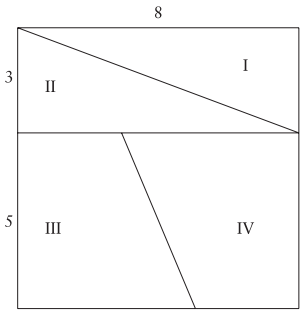
Bu soruyu da asistan kısa bir süre düşündükten sonra yanıtlar. Asistanın verdiği yanıtı bulabilir misiniz?

Not: Problemlerin çözümleri kitabın sonunda "Yanıtlar" bölümünde.

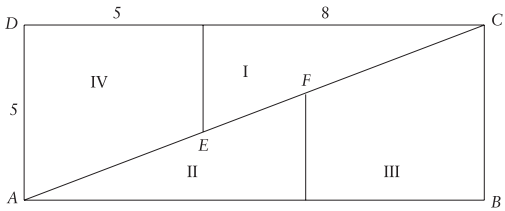
FİBONACCİ YAPBOZLARI

Popüler matematik yazılarına meraklı birçok okur aşağıdaki şekilleri anımsayacaktır. Lewis Carroll (Levis Carroll *Alice Harikalar Diyarında* adlı kitabın yazarı olup aslında matematikçi Charles L. Dodgson'dır) tarafından önerilen bu geometrik yanıltmacada, 8×8 boyutlu bir kare Şekil 1'de gösterildiği biçimde 4 parçaya ayrılır ve bu parçalar yeniden düzenlenip Şekil 2'deki 5×13'lük dikdörtgen elde edilir. Karenin alanı 64, dikdörtgenin alanı ise 5×13 = 65 birim karedir. Nasıl oldu da dikdörtgenin alanı karenin alanından 1 birim kare fazla çıktı?

Şekil 1



Şekil 2

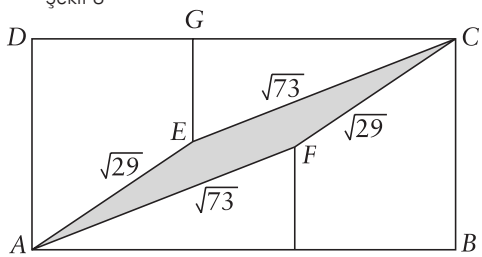


Burada bir göz aldatmacası var. Çünkü aslında Şekil 2'de doğrusal gibi görünen A, E, F, C noktaları doğrusal değiller. Nitekim Pisagor Teoremi'nden

$$|AE| = \sqrt{29} \text{ ve } |EC| = \sqrt{73}$$

bulunur ki, bu iki sayının toplamı dikdörtgenin köşegen uzunluğu olan $\sqrt{194}$'e eşit değildir. Ayrıca A, E, F, C noktaları doğrusal olsaydı ACD ve ECG üçgenleri benzer olacaktı. Oysa bu dik üçgenler benzer değil; çünkü $8/13 \neq 3/5$. Peki, bu dört nokta nasıl bir şekil oluşturur? Bu sorunun yanıtı, Şekil 3'te görülmektedir. Köşeleri A, F, C, E ve alanı 1 birim kare olan uzun ve ince bir paralelkenar oluşur.

Şekil 3



EAF üçgenine kosinüs teoremi uyguladığımızda bu paralelkenarın dar açısı olan EAF'nin ölçüsünü yaklaşık olarak 1^0 31' 40" buluruz. Yani $AFCE$ dörtgeni çok ince bir paralelkenardır; o kadar incedir ki bu paralelkenarı göz, bir düz çizgi olarak algılar.

Yazının başlığına dönelim… Bu yapbozun Fibonacci'yle ne ilgisi var? Önce meşhur Fibonacci dizisi hakkında kısa bir bilgi verelim. İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci (1175-1250), 1202'de *Liber abaci* (Abaküs kitabı) isimli eserinde bir tavşan popülasyonu problemini 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, … dizisiyle açıklar. Tavşanları bir yana bırakıp sayı dizisinin kendisiyle ilgilenelim. Bu sayı dizisini sözcüklerle şöyle ifade edebiliriz: İlk ikisi dışında her sayı, kendinden önce gelen iki sayının toplamından oluşmuştur. Birçok matematikçi bu diziden çok ilginç sonuçlar ve problemler çıkarmıştır.

Yapbozumuzdaki kare ve dikdörtgeni oluşturan parçaların kenar uzunlukları ardışık üç Fibonacci sayısı olan 3, 5 ve 8'dir. Bu üç "Fibonacci"nin ardışık olmaları dışında hiçbir özelliği yoktur. Ardarda gelen farklı üç "Fibonacci" alarak da benzer bir yapboz oluşturulabilir ve daha büyük sayılar kullanabiliriz. Örneğin 13, 21, 34 sayılarından yapılacak bir yapbozla 441 = 442 eşitliği görsel olarak "kanıtlanabilir" ve bu parçalardan yapılacak bir makette yanıltmacayı açıklayan geometrik "uyumsuzluk" daha zor fark edilir, çünkü 442 birim karelik alanın içinde oluşan 1 birim karelik alanlı paralelkenarın gözle fark edilmesi çok zordur.

Şimdi yukarıda söylediklerimizi matematiksel olarak açıklayalım ve kanıtlayalım. Dizide n'ninci sayıyı F_n ile gösterelim. F_n'nin kendinden önce gelen F_{n-1} ve F_{n-2} sayılarının toplamı olduğunu düşünerek, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ ve her $n > 2$ için bu dizinin bütün sayılarını ifade eden denklem, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ olarak yazılabilir ve buradan da aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
F_1F_3 - F_2^2 &= 1\times 2 - 1^2 = (-1)^2\\
F_2F_4 - F_3^2 &= 1\times 3 - 2^2 = (-1)^3\\
F_3F_5 - F_4^2 &= 2\times 5 - 3^2 = (-1)^4\\
F_4F_6 - F_5^2 &= 3\times 8 - 5^2 = (-1)^5\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Yukarıdaki bu eşitlikler ilk kez Fransız matematikçi ve astronom Cassini tarafından 1680'de (Fibonacci'den 378 yıl sonra) teorem olarak verilmiştir:

$$(F_{n+1})^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n.$$

Sözcüklerle anlatırsak: $(n+1)$'inci terimin karesinden $(n+2)$'nci terimle n'ninci terimin çarpımını çıkarırsak, n çiftse 1, n tekse -1 bulunur. Bu eşitlik değişik yöntemlerle kanıtlanabilir. Biz, tümevarım yöntemini kullanarak kanıtlayacağız. Cassini'ye inanıyoruz, ama "Kanıt hijyendir" diyerek başlayalım.

$n = 1$ için $(F_2)^2 - F_3F_1 = -1$ bulunur, $F_1 = F_2 = 1$, $F_3 = 2$ olduğundan eşitlik doğrudur.

Şimdi $n = k$ için eşitliğin doğru olduğunu varsayıp $n = k+1$ için doğruluğunu kanıtlayalım.

Eşitliğin $n = k$ için doğru olduğunu varsaydığımızdan

$$(F_{k+1})^2 - F_{k+2}F_k = (-1)^k \quad \text{(I)}$$

yazabiliriz.

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

denkleminde n'yi önce $k + 2$ sonra da $k + 3$ seçersek

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k \quad \text{(II)} \quad \text{ve}$$
$$F_{k+3} = F_{k+2} + F_{k+1} \quad \text{(III)}$$

elde edilir ki, bunlardan da

$$F_k = F_{k+2} - F_{k+1} \text{ ve } F_{k+2} = F_{k+3} - F_{k+1}$$

bulunur. Bu son bulduklarımızı (I)'de yerine koyarsak

$$(F_{k+1})^2 - (F_{k+3} - F_{k+1})(F_{k+2} - F_{k+1}) = (-1)^k$$

bulunur. Sadeleştirmeleri yaparsak,

$$F_{k+3}F_{k+1} + F_{k+1}F_{k+2} - F_{k+3}F_{k+2} = (-1)^k$$

elde ederiz ve bu eşitlikte (III)'ü kullanırsak,

$$F_{k+3}F_{k+1} + F_{k+1}F_{k+2} - (F_{k+2} + F_{k+1})F_{k+2} = (-1)^k \quad \text{ve}$$

$$F_{k+3}F_{k+1} - (F_{k+2})^2 = (-1)^k$$

bulunur ki bu eşitliğin her iki tarafı -1 ile çarpılırsa

$$(F_{k+2})^2 - F_{k+3}F_{k+1} = (-1)^{k+1}$$

elde edilir. Bu da Cassini eşitliğinin $n = k+1$ durumudur. Kanıtımız bitmiştir.

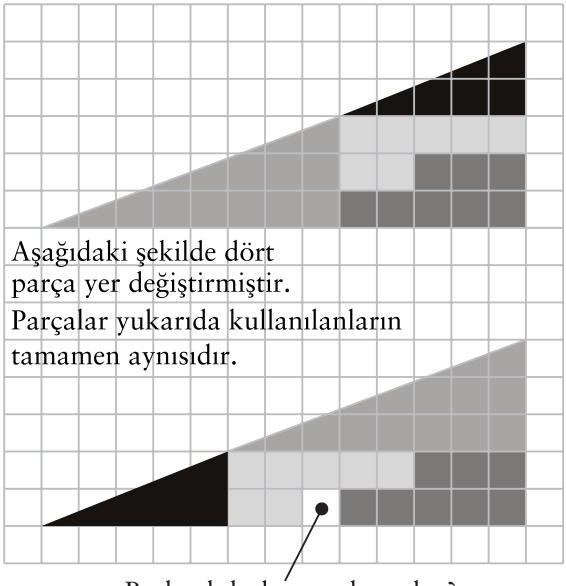
Cassini'nin Formülü, yapbozumuzun Fibonacci sayılarıyla olan ilişkisini açıkça ortaya koymaktadır:

$$F_5F_7 - (F_6)^2 = 5\times13 - 8^2 = (-1)^6.$$

Genelleştirirsek, karenin alanı $(F_n)^2$ olurken, $F_{n-1}F_{n+1}$ ise oluşmayan "dikdörtgenin" alanıdır. 1 birim karelik alan ya kaybolur

ya da artar. Cassini Formülü bize *n* çiftse fazladan 1 birim karelik alanın oluşacağını, *n* tekse 1 birim karelik alanın "kaybedileceğini" ve ortadaki parçaların üst üste bineceğini gösterir.

Yapbozcular Fibonacci sayılarını çok severler. Amatör bir sihirbaz olan Paul Curry'nin kurguladığı ve Martin Gardner'in *Mathematics, Magic and Mystery* isimli kitabında yer alan bir başka yapboz da aşağıdaki gibidir. Bu yapbozdaki yanıltmacayı ve Fibonacci sayılarıyla olan ilişkisini bulmayı okura bırakıyoruz.



4. Bölüm

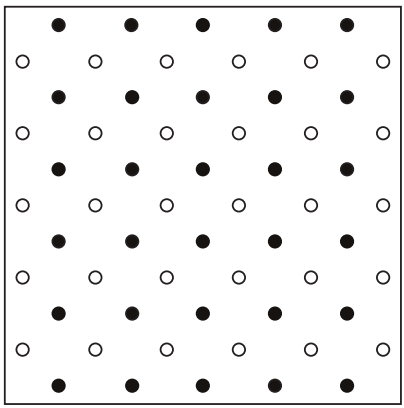
Matematiksel Oyunlar

EĞLENCELİ BİR OYUN: BRİDG-IT

Kırmızı ve siyah kurşun kalemle kâğıt üzerinde kolaylıkla oynanan bir oyun. Bir kâğıda 30 kırmızı, 30 siyah nokta Şekil 1'deki gibi işaretlenir. (Aşağıdaki şekilde kırmızı noktalar içi boyanmamış daireler olarak gösterilmiştir.)

Oyunculardan biri siyah, rakibi de kırmızı kalemi kullanır. Birinci oyuncu kendi rengindeki yanyana veya üst üste olan iki noktayı birleştirerek yatay veya dikey bir çizgi çizer. Daha sonra, diğer oyuncu kendi rengindeki yanyana veya üst üste olan iki noktayı birleştirerek aynı şeyi yapar. Bu şekilde sırayla iki noktayı birleştirerek oynarlar. Siyah, siyah noktaların üst sırasından alt sırasına (veya alttan üste doğru) kadar kesintisiz çizgiler yolu oluşturmaya çalışır. Yolun düz çizgi olması gerekmemektedir. Yol, en üstteki siyah noktalardan biriyle en alttaki siyah noktalardan birini birleş-

Şekil 1.



tirdiği sürece herhangi bir tarafa kıvrılarak tamamlanabilir. Kırmızı, en soldaki sütunda bulunan kırmızı noktalardan biriyle en sağda yer alan (veya en sağdan en sol sütuna) sütundaki noktalardan biri arasında benzer şekilde bir yol oluşturmaya çalışır. Elbette, bir oyuncunun çizdiği çizgiyle diğer oyuncunun çizgisi kesişmemelidir. Oyuncuların her ikisi de kazanacakları yolu oluşturmaya çalışırlarken, aynı zamanda diğer oyuncunun kazancağı yolu engellemek için de çizgilerini kullanırlar.

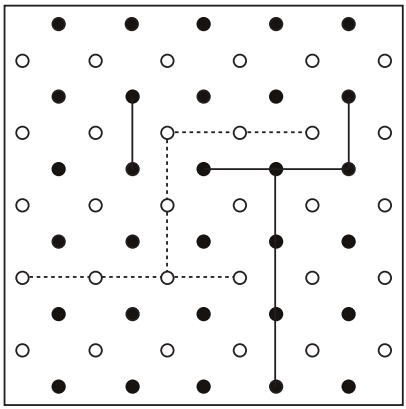
Kendi yolunu ilk tamamlayan oyuncu kazanır. Şekil 2'de herhangi bir oyundan bir pozisyon, Şekil 3'te de aynı oyunun sonu gösterilmiştir. Kırmızıyla oynayan (kesikli çizgiyle gösterilen) kazanmıştır.

Bridg-It isimli bu sıradışı oyun Amerikalı matematikçi David Gale tarafından yaratılmış ve Martin Gardner'in kitaplarında yayımlandıktan sonra popüler olmuştur.

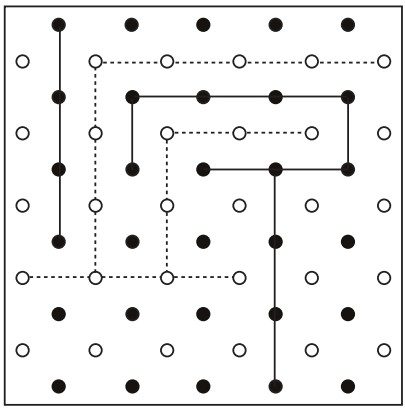
İlk oyuncu, doğru hamleler yapması durumunda daima kazanır, yani bir kazanma stratejisi vardır.

İlk oyuncunun kazanma stratejisinin ne olabileceğini sonraya bırakalım ve önce böyle bir stratejinin var olduğunu kanıtlayalım. Matematik-

Şekil 2.



Şekil 3.

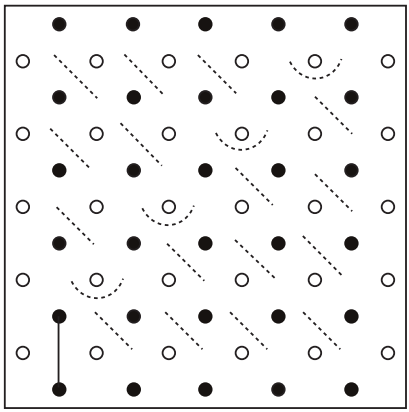


te "olmayana ergi" adıyla bilinen kanıt yöntemini kullanacağız. Oldukça güzel bir kanıt: Tersini varsayalım, yani ilk oyuncunun değil de ikinci oyuncunun kazanma stratejisinin olduğunu kabul edelim. İlk oyuncu ilk çizgisini herhangi bir yere çizerek oyuna başlar, bu hamle ikinci oyuncuyu kaybeden konumda bırakmış olamaz, çünkü ilk oyuncunun kaybeden olduğunu kabul etmiştik. Yani ikinci oyuncu ilk ve sonraki hamleleriyle birinci oyuncuyu kaybeden konumda bırakabilir. Ama o zaman birinci oyuncu ilk hamlesinden sonra ikinci oyuncununkine benzeyen (taklit eden) hamleler yaparak, ikinci oyuncunun stratejisini uygular (çalar). Böylece ikinci oyuncuyu kaybeden konumunda bırakır. Bu da ikinci oyuncunun kazanma stratejisinin olması varsayımıyla çelişir. O halde o varsayım doğru olamaz. Bu yüzden birinci oyuncunun kazanma stratejisi vardır.

İlk oyuncunun kazanma stratejisi

Matematikçilerin sıklıkla kullandığı "olmayana ergi" yöntemiyle yaptığımız bu kanıt birinci oyuncunun kazanma stratejisinin var olduğunu göstermektedir, fakat bu stratejiyi açıklamamaktadır. Bu stratejinin ne olduğunu Şekil 4'teki çizimleri inceleyerek anlayabiliriz. Şöyle: Birincinin ilk hamlesi sol alt köşedeki iki noktayı birleştirmek olsun. Daha sonra ikincinin çizebileceği çizgiler çapraz kesik çizgilerin veya yayların bir ucundan geçtiğinde, birinci, çapraz kesik çizgilerin veya yayların diğer ucundan geçen çizgiler çizmeli. Oliver Gross tarafından keşfedilen bu stratejiyle birinci oyuncu daima kazanır.

Şekil 4.



Gross, bu stratejiyi keşfederken çapraz olarak koyduğu kesik çizgiler ve

yaylarla birinci oyuncunun ikinciyi taklit ederek (simetrik hamlelerle) bloke etmesini sağlıyor. Birinci oyuncu, ikinci oyuncu çizgisini çizdikten sonra, o çizginin altında ve üstünde kalan çizgileri gruplayarak hamlesini yapıyor. İkincinin komşu noktalar arasında yatay çizgilerle bir yol çizmesini engellemek için dikey çizgilerle yanıt veriyor, tersi durumda ise yatay çizgileri kullanıyor. Bu yazdıklarımızın daha iyi anlaşılması için kesik çizgilerin ve yayların koyulduğu yerlere dikkatle bakmak gerekir.

Bu oyunda birinci oyuncunun kaybedeceği tek koşul, bir hamleyi boşa harcarsa veya doğru savunma yapamazsa gerçekleşir. Bunun dışında birinci oyuncunun kazanması garantidir. "Olmayana ergi" yöntemiyle yaptığımız kanıt, oyunun beraberlikle bitemeyeceğini göstermektedir.

Bu oyunun matematiksel özelliğinin olmadığı söylenebilir. Ancak Bridg-It gibi basit kuralları olan oyunların altından ince matematiksel yapıların çıkıyor olması oldukça etkileyicidir. Matematiğin önemli dallarından biri olan çizge kuramı birçok oyunun analizinin yapılmasına, kazanma stratejisinin belirlenmesine önayak olmuştur. Birdg-It'de de kazanma stratejisi çizge kuramıyla çıkarılabiliyor, fakat biz burada Bridg-It'i bu yöntemle ele al(a)madık. Meraklı okur çizge kuramıyla elde edilen birinci oyuncunun kazanma stratejisini Kaynak 2'de bulabilir.

KAYNAKLAR

1) Gardner, M, *Entertaining Mathematical Puzzles*, Dover Publications, 1960.
2) Sandy, D, *The Game of Bridg-It*, scimath.unl.edu, pdf, 2008.

GOOGOL OYUNU

Bir arkadaşım önermişti bu oyunu, bahis üzerine oynamayı. Bire beş veriyordu. Her oyunda, o 5 lira, bense 1 lira ortaya koyacaktım, kazanan 6 lirayı alacaktı. Bir kâğıdı on küçük parçaya bölerek her birinin üzerine benim göremeyeceğim şekilde on farklı pozitif sayı yazdı. Yazılan on sayının en büyüğünün hangisi olduğunu tahmin etmeye dayalı olan bu oyunu şöyle oynayacaktık: Kâğıtları sayılar görünmeyecek şekilde ters çevirerek masaya koydu. Ben, kâğıtları tek tek çevirerek, bu on sayının en büyüğünü bulmaya çalışacaktım, ama bir koşulla: Geriye dönmek yoktu, yani daha önce çevirmiş olduğum kâğıtlarından herhangi birini seçemezdim. Örneğin ilk altı kâğıdı çevirmişsem, ilk beş kâğıdı seçme şansım olmadığı için sadece altıncı kâğıttaki sayının en büyük sayı olabileceği tahmininde bulunabilirdim. Eğer bütün kâğıtları çevirmişsem, tabii ki en sondaki kâğıtta yazılı olan sayıyı seçmek zorunda kalacaktım. Bu oyunu, beklenti hesabı yapmadan beş kez oynamış, beşinde de en büyük sayıyı bulamayarak kazanabileceğim "5 lira"ların dışında kendi koyduğum beş lirayı da kaybetmiştim!

İsmini matematikteki en büyük sayılardan biri olarak kabul edilen googol'dan (10^{100}) alan bu oyunun "Sekreter Problemi", "Sultanın Çeyiz Sorunu", "Evlilik Problemi" gibi birçok ilginç uyarlaması vardır. Örneğin bir kız, yıl sona ermeden önce evlen-

meye karar verir. Bu kız, kendisine evlenme teklifinde bulunmaya ikna edeceği on erkek ile karşılaşacağı tahmininde bulunur. Ama yapılan teklifi bir kez reddedecek olursa teklifi yapan erkek bir daha tekrar teklif etmeyecektir. Bu on erkeğin en iyisinin teklifini kabul etme olasılığının en büyük olması için bu kız hangi stratejiyi izlemelidir? Bu soruyu Googol Oyunu üzerinden yanıtlayacağız.

Martin Gardner'in *Mathematical Diversions* isimli kitabında yer alan Googol Oyunu'nda iyi bir strateji kullanırsanız kazanma olasılığınız 1/3'ten biraz fazla olabiliyor. Sadece iki kâğıt parçasında yazılı sayılardan büyük olanını bulma olasılığı elbette 1/2, kâğıt parçası sayısı artıkça oyunu kazanma olasılığımızın azalacağını düşünürüz. Ama bu olasılık, kâğıt parçası sayısı ne kadar artarsa artsın iyi bir strateji izlenmesi durumunda hiçbir zaman 0,367879'un altına düşmüyor.

En iyi stratejiyle, on adet kâğıt parçası üzerinde yazılı olan sayılardan en büyüğünü bulma olasılığı 0,367879 olur. Burada uygulanan strateji şöyledir: Üç tane kâğıdı çevirip bunların üzerinde yazılı olan en büyük sayıyı not ettikten sonra, bu sayıyı aşacak bir sonraki sayının yazılı olduğu kâğıdı seçmek. Bu strateji ile uzun vadede her beş oyundan ikisini kazanma olasılığı var.

Yukarıdaki örnekten de anlaşılacağı gibi en iyi strateji, ilk olarak belli sayıdaki kâğıdı ters çevirip, o sayıları elemeyi gerektirir. Sonrasında, önceden elenmiş sayılar arasında en büyük sayıdan daha büyük sayı gelinceye kadar kâğıtlar ters çevrilir. Elenmiş sayıların en büyüğünden daha büyük olan ilk sayıyla karşılaşıldığında bu sayı için "en büyük sayı budur" tahmininde bulunulur. Örneğin 20 sayı varsa, en iyi stratejiyi uygulayabilmek için ilk yedi kâğıdı ters çevirerek öğrendiğimiz yedi sayıyı eliyoruz, sonraki sayılar içerisinde ilk yedi sayının en büyüğünden daha büyük olan ilk sayının en büyük sayı olduğu tahminde bulunuyoruz. Peki, 10 sayıda üç tane, 20 sayıda yedi tane olarak belirlediğimiz elenecek sayı adedini nasıl buluyoruz ve oyunu kazanma olasılığı nasıl hesaplanır?

Bu soruların yanıtlarını oyunun genel analizini yaparak ve-

relim. Yazının bundan sonrasında malesef, popüler bir makale için "ciddi" matematik sayılabilecek bölümler var, ama meraklı okurun ilgisini çekeceğini umuyorum.

Oyunun analizi: n adet kâğıt (fiş) olsun. Bu fişleri 1'den n'ye kadar numaralandıralım. Başlangıçta ilk r–1 fişi açarak elediğimizi varsayalım ve r–1 sayı içindeki en büyük sayı p olsun. Bu durumda r–1 tane fişten sonra açtığımız fişler arasında p'den büyük ilk sayı m'ninci sıradaki fişte yazılı olsun. Böylece en büyük sayıyı bulma, yani m'ninci fişi çekme olasılığı aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

1) $m \geq r$ olmalı, yani seçtiğimiz sayı başta attığımız r–1 sayıdan birisi olamaz.

2) m'ninci fişteki sayının en büyük olma olasılığı $1/n$ dir.

3) m'nin, attığımız r-1 sayıdan sonraki ilk en büyük sayı olma olasılığını şöyle hesaplayabiliriz: Bu olasılık, ilk m–1 sayı arasında, attığımız r-1 sayıdan bir tanesinin en büyük olması olasılığına eşittir, çünkü önce ilk r-1 fiş içinde en büyük sayının bulunduğu fiş seçilmeli ki m'ninci fiş seçilsin. Bu durumda aradığımız olasılık $(r–1)/(m–1)$ olur.

Bu sonuçlara göre en büyük sayıyı bulma olasılığını yazabiliriz. En büyük sayı sırasıyla r'inci, r+1'inci, r+2'inci…n'ninci sıradaki fişte olabileceğinden bulmak istediğimiz olasılık tek tek bu fişleri seçme olasılıklarının toplamıdır. Toplam sembolüyle ifade edelim:

$$P(r) = \sum_{m=r}^{n} \frac{r-1}{m-1} \times \frac{1}{n} = \frac{r-1}{n} \sum_{m=r}^{n} \frac{1}{m-1}$$

olur. Bu toplamı Riemann toplamına dönüştürebilmek için $1 / (m–1)$ kesrini n ile çarpıp bölersek,

$$P(r) = \frac{r-1}{n} \sum_{m=r}^{n} \frac{n}{m-1} \times \frac{1}{n}$$

olur.

$r \leq m \leq n$ koşuluyla $t(m) = (m–1)/n$ ise $n/(m–1) = 1/t(m)$ olur ve buradan Riemann toplamındaki $f(t) = 1/t$ bulunur. Öte yandan $t(m)–t(m–1) = 1/n = \Delta t$ olur.

$n \to \infty$, $r/n \to x$ olduğunu varsayarak,
$n \to \infty$ için $t(r) = (r-1)/n \to x$ ve
$t(n) = (n-1)/n \to 1$ olur. Soldan ve sağdan limit alarak elde ettiğimiz 1 ve x değerleri integralin sınırlarıdır.

Hesaplamak istediğimiz $P(r)$ olasılığı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$P(r) = \frac{r-1}{n} \sum_{m=r}^{n} f\left[t(m)\right] \Delta t$$

olur ki buradan,

$$\to x \int_{x}^{1} \frac{1}{t} dt = -x \ln x$$

elde edilir.

Bu sonuç oyunu kazanma olasılığımızı veren bir fonksiyondur. $r/n \to x$ olduğunu hatırlayalım. Bu fonksiyonu maksimum yapan x değeri türevle $1/e$ bulunur. Bu değeri fonksiyonda yerine koyduğumuzda oyunu kazanma olasılığının maksimum $1/e$ olduğu sonucuna ulaşırız.

Sonuç: Yukarıdaki hesaplamalarla elde ettiğimiz

$$1/e = 0{,}367879...$$

sayısı bize, oyunu kazanma olasılığımızın en iyi stratejiyle yaklaşık olarak yüzde 37 olduğunu söyler. Ayrıca $r/n \to x$ olduğundan $r/n \to 1/e$ olur ki bu da bize başlangıçta n/e sayısına en yakın sayıdan küçük en büyük tamsayı kadar fişi elememiz gerektiğini gösterir. Örneğin on fişle oynuyorsak $10/e = 3{,}67879...$ sayısından küçük en büyük tamsayı 3 olduğundan, 3 tane fişi elemeliyiz.

KAYNAKLAR

1) Gardner, M, *Mathematical Diversions*, Association of America Washington, 1985.
2) Ferguson, T, "Who Solved Secretary Problem?", www.math.upenn.edu.Secretary.pdf

BLÖFLÜ BİR OYUN YA DA KUMARIN MATEMATİĞİ

Bir kumarbaz oynadığı oyunun analizini çoğu zaman yapmaz. Kendi oyun bilgisine, sezgi ve şansına güvenerek oynar. Kazanmaktan çok, kumar oynamaya tutkuludur. Dostoyevski, *Kumarbaz* isimli romanında bu durumu bir kumarbazın ağzından şu soruyla anlatır: "Aslında merak ediyorum, şimdiye kadar oyun masasına yaklaşıp da batıl bir inanca saplanmayan biri var mıdır acaba?" Kumarbazın "batıl inancı" oyun tutkusundan kaynaklanır. Oysaki çok basit bir hesapla kazanma şansının ne kadar az olduğunu anlayabilir; ama kumar tutkusu böylesi bir hesabı yapmasını ve ona göre oynamasını engeller.

Oyun teorisinde **matematiksel beklenti** adı verilen hemen herkesin yapabileceği bir hesap vardır. Matematiksel beklenti bir oyunda bir oyuncunun ortalama ne kadar kazanacağını ya da kaybedeceğini gösteren bir sayıdır. Bir tür test cihazı gibi. Bir örnekle açıklayalım. Örneğin Dostoyevski'nin Avrupa'ya giderek sık sık oynadığı ve bu sayede her şeyini kaybettiği rulet oyunundaki matematiksel beklentiyi hesaplayalım.

Rulet oyunu tekerleğinde dönen ufak topun her birine aynı olasılıkla girip kalabileceği numara verilmiş 37 küçük delik vardır. Eğer topun gireceği deliğin numarası doğru bilinirse kazanç 35'e 1 olur; yani 1 lira koyulursa 36 lira alınır.

Rulet masasında parayı 12 numaraya yatırdığımızı ve 1 lira koyduğumuzu varsayalım. Top dönüp dönüp 12'ye düşerse 36 lira alırız, yani 35 lira kazanırız. 12'ye düşmezse 1 lira kaybederiz. Masa üzerinde 37 numara olduğu için topun 12'ye düşme olasılığı 1/37'dir. Tabii ki topun 12'ye düşmeme olasılığı da 36/37 olur. Matematiksel beklenti, kaybedilecek para miktarının kaybetme olasılığının çarpımıyla, kazanılacak para miktarının kazanma olasılığıyla çarpımının toplamıdır:

$$-1 \times \frac{36}{37} + 35 \times \frac{1}{37} \cong -0,027027$$

sayısı rulet oyunundaki **beklentinin** negatif olduğunu, yani bu oyunu uzun vadede oynadığımızda koyduğumuz paranın yaklaşık 0,027027 katını kaybedeceğimizi gösterir.

Dostoyevski, ilk kez rulet oynadığında 10.000 frank kazanmış, ama sonrasında yukarıda hesapladığımız negatif çıkan beklenti sayısı yüzünden (!) tüm kazandığını kaybettiği gibi büyük miktarlarda borçlanmıştır. Daha sonra, yayınevinden aldığı avansı ödeyebilmek için 25 gün içinde *Kumarbaz*'ı yazmak zorunda kalmıştır.

Matematiksel beklenti hesabı yapabileceğimiz daha ilginç bir oyunla kumar oynamayı sürdürelim!

Blöflü bir oyun

Masaya, görünmeyen yüzlerinden biri kırmızı, diğeri mavi renkte olan iki kart koyalım. Kırmızı kart mavi karttan daha değerli olsun. Oyun iki kişi arasında şöyle oynanıyor:

A oyuncusu *B* oyuncusuna göstermeden kartlardan birini rastgele alıyor; kart kırmızı renkteyse "kırmızıyı çektim" diyerek *B*'den 1 lira istiyor. Eğer çektiği kart mavi renkteyse iki durum söz konusu: Ya "maviyi çektim" diyerek *B*'ye 1 lira ödüyor ve *B*'nin 1 lirayı almaktan başka seçeneği kalmıyor, ya da *A*, elindeki kart mavi renkte olduğu halde blöf yaparak "kırmızıyı çektim" diyor ve *B*'den 1 lira istiyor. Ama bu durumda *B*'nin söylenene inanmama hakkı var. *A*'nın "kırmızıyı çektim" dediği her durumda *B*, *A*'nın elindeki kartı görmek isteyebilir. *A*, "kırmızıyı çektim" dedi-

ğinde *B*, kartı açtırır ve kartın rengi kırmızı çıkarsa inanmamanın bedeli olarak *A*'ya 2 lira ödüyor, kartın rengi mavi çıkarsa bu kez *A*, *B*'ye yalan söylemenin bedeli olarak 2 lira ödüyor.

Kuralları belki biraz karışık, oynanması ise oldukça basit bir oyun. İşin içinde para var, tam bir kumar oyunu, ama biz oyundaki matematiğe bakacağız, her bir oyuncu için en iyi stratejiyi bulacağız.

Oyunun analizi: *A*, iki karttan birini seçmek zorundadır. Eğer kırmızıyı çekerse, seçme hakkı yoktur, sadece B'den 1 lira isteyebilir. Bu takdirde *B* için iki seçenek vardır: *A*'ya inanmak veya inanmamak, yani ona 1 lira ödemek veya elini göstermesini istemek. Eğer *A* maviyi çekerse, bu takdirde bir seçim yapması gerekir: Blöf yapmak veya yapmamak. Blöf yaparsa, *B* için yine iki seçenek vardır: *A*'ya inanmak veya inanmamak, yani *A*'ya 1 lira ödemek veya elini göstermesini istemek. *A* blöf yapmazsa, *B*'nin 1 lirayı kabul etmekten başka bir seçeneği yok.

Şimdi, her iki oyuncunun da olası stratejilerini yazalım. Elbette, *A* için sadece iki strateji vardır: A_1: Blöf yapmak, A_2: Blöf yapmamak. Benzer şekilde *B* için de iki strateji vardır: B_1: *A*'ya inanmak, B_2: *A*'ya inanmamak

Yukarıda ifade ettiğimiz dört ayrı stratejiden oluşan kombinasyonları inceleyelim ve her strateji için A oyuncusunun matematiksel beklentisini bulalım.

1. durum: A_1B_1 (*A* blöf yapıyor, *B* ona inanıyor).

A'nın kırmızıyı çekme olasılığı 1/2 ve bu durumda bir tek seçeneği var: *B*'den 1 lira istemek. *B* de bu parayı ödemek zorunda, *A*'nın kazancı 1'dir.

A'nın maviyi çekme olasılığı da 1/2 ve bu durumda blöf yapar ve *B*'den 1 lira ister, kazancı yine 1'dir.

Beklenti:

$$1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 1 \text{ 'dir.}$$

2. durum: A_1B_2 (A blöf yapıyor, B elini göstermesini istiyor).

A kırmızıyı çekerse (1/2 olasılıkla), yapabileceği tek şey vardır: *B*'den 1 lira istemesi gerekir. *B* ise *A*'dan elini göstermesini ister ve *A*'ya 2 lira ödemek zorundadır. *A*'nın kazancı 2'dir.

A maviyi çekerse (1/2 olasılıkla), blöf yapar ve *B*'den 1 lira ister. *B* elini göstermesini ister ve A'dan 2 lira alır. *A*'nın kazancı -2'dir.

Beklenti:

$$2\times\frac{1}{2}+(-2)\times\frac{1}{2}=0\text{ 'dır.}$$

3. durum: A_2B_1 (*A* blöf yapmıyor, *B* elini göstermesini istemiyor).

A, kırmızıyı çekerse, 1 lira ister, *B* bunu öder, *A*'nın kazancı 1'dir.

A, maviyi çekerse, *B*'ye 1 lira öder ve *B* de bunu kabul eder. *A*'nın kazancı -1'dir.

Beklenti:

$$1\times\frac{1}{2}+(-1)\times\frac{1}{2}=0\text{ 'dır.}$$

4. durum: A_2B_2 (*A* blöf yapmıyor, *B* elini göstermesini istiyor).

A kırmızı çekerse, 1 lira ister. *B* elini göstermesini ister ve 2 lira ödemek zorunda kalır. *A*'nın kazancı 2'dir.

A maviyi çekerse, *B*'ye 1 lira öder, *B* de bunu kabul etmek zorundadır. *A*'nın kazancı -1'dir.

Beklenti:

$$2\times\frac{1}{2}+(-1)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\text{ 'dir.}$$

A oyuncusunun olası stratejilerine göre hesapladığımız dört durumun beklentilerinden oluşan bir tablo yapalım.

Bu tabloda, A_1 ve A_2 satırları *A* oyuncusunun A_1 ve A_2 stratejilerine göre ortalama kazancını gösteren sayılardan oluşurken, B_1 ve B_2 sütunları ise *B*'nin, B_1 ve B_2 stratejilerine göre *A* oyuncusunun ortalama kazancını gösteren sayılar-

A \ B	B_1 (İNANIYOR)	B_2 (İNANMIYOR)
A_1 (BLÖF YAPIYOR)	1	0
A_2 (BLÖF YAPMIYOR)	0	1/2

dan oluşuyor. *A* oyuncusu hem A_1, hem de A_2 stratejisiyle uzun vadede kaybetmiyor, çünkü **beklenti** sayısı en az sıfır.

Tabloda ilk satıra bakarsak, *A* oyuncusunun A_1 stratejisini (blöf yapmayı) uyguladığında daha çok kazanacağı sonucunu çıkarabiliriz, ama acele etmeyelim. Çünkü *A*, A_1 stratejisini uyguladığında *B* bir süre sonra bu stratejiyi keşfedecek ve B_2 stratejisiyle yanıt vererek kaybetmemeyi garantileyecektir. O halde *A*'nın her defasında aynı stratejiyi kullanmakta ısrar etmesi onun kazanmasını garantilemez. Bazen A_1'i, bazen de A_2'yi seçerse, yani bazen blöf yapar, bazen de yapmazsa kazanma şansını artırabilir. Uyguladığı stratejiyi rakibinin keşfetmemesi için oyunun belli aşamalarında seçimini değiştirmelidir.

Buradan sezgisel olarak ulaştığımız sonuç, oyun teorisinin önemli kavramlarından biri olan *karma stratejidir*. Bir *karma strateji*, bilinen stratejilerin (burada A_1 ve A_2) rastgele, fakat **belli bir oranda karıldığı** bir stratejidir. Örneğin oyun 5 kez oynanmış olsun. *A* oyuncusu önceden belirlediği karma strateji gereği rastgele 3 oyunda blöf yapıyor, diğer ikisinde yapmıyor ve bu durumda maksimum kazancı elde ediyor. Burada A_1 stratejisinin uygulanma oranı 3/5 olur. Hemen belirtelim, bu sayıları kafadan attık, gerçek oran 3/5 değil.

Acaba, *A* oyuncusu A_1 ve A_2 stratejilerini hangi oranda uygularsa avantajlı olur? Bu oyunda A_1 stratejisinin uygulandığı oyunların sayısının tüm oyunlara oranına x diyelim ve *A*'yı en avantajlı yapan x sayısını bulalım. Tabii ki, A_2 stratejisinin uygulandığı oyunlar için bu oran $1–x$ olur.

B oyuncusu, *A*'nın en iyi *karma stratejisine* karşılık B_1 ve B_2 stratejileriyle yanıt vererek en iyi sonucu almaya çalışacaktır. Bu aşmada oyun teorisindeki bir teoremden söz etmeliyiz: *A oyuncusu kendi en iyi stratejisine bağlanırsa, B oyuncusu* B_1 *ve* B_2 *stratejilerini en yararlı şekilde kullansa bile, her iki stratejide de kazancı en çok oyunun değerine eşit olur*. Bu teoremin kanıtını burada veremiyoruz. (Kanıt ve daha ayrıntılı bilgi için bkz. Kaynak 1, S.22-26.) Teoremde sözü edilen "oyunun değeri" kavramı, bu oyunda bir oyuncunun ortalama kazancına eşittir. Ortalama kazanç, bilinen bir stratejiye göre bir oyuncunun o stratejinin uy-

gulama oranları ile beklenti tablosundaki sayıların çarpımlarının toplamıyla bulunur. Örneğin *A* oyuncusunun beklenti sayılarına göre oluşturduğumuz tabloda *A*'nın A_1 stratejisine göre ortalama kazancı *x* oranına göre $x\times1+x\times0 = x$ olur.

Oyuna dönersek… *A*'nın A_1 stratejisini x oranında oynadığını ve böylece en kazançlı olduğunu varsayalım. Bu durumda *B*, A_1 stratejisine karşı en yüksek kazancı elde edebilmek için B_1 ve B_2 stratejileriyle yanıt verecektir. Her iki strateji de *B* için en ideal strateji olmak zorundadır ve ortalama kazançlar oyunun değerine eşittir. Çünkü bu stratejilerden biri diğerinden daha kazançlı bir sonucu doğursaydı, oyun karma stratejilerden değil, bilinen stratejilerle oynanırdı. Oysa oyunun karma stratejiyle oynanması gerektiğini saptamıştık.

Şimdi, *A*'nın A_1 stratejisine karşılık (x oranında) *B*'nin yanıtı olan B_1 ve B_2 stratejilerinin ortalama kazançlarını birbirine eşitleyip *x*'i bulalım.

$$x.1 + x.0 = (1 - x).0 + \frac{1}{2}.(1 - x)$$

Bu denklemden $x = 1/3$ bulunur.

Sonuç: Demek ki *A* oyuncusu 1/3 oranında blöf yapmalı, 2/3 oranında blöf yapmamalıdır. Böylesi bir karma stratejiyle *B* üzerinde daima daha fazla avantaj sağlar.

Benzer şekilde hesaplanırsa, *B* oyuncusu *A*'nın sözlerine 1/3 oranında inanmalı ve 2/3 oranında elini göstermesini istemelidir. Bu durumda ortalama kaybı en çok 1/3 oranında olacaktır.

KAYNAKLAR

1) E.S., Ventsell, *Oyunlar Teorisine Giris*, Çev. Halil Yüksel, TMD Yayınları, 1965.
2) F., Dostoyevski, *Kumarbaz*, Çev. Vecdi Güney, Sosyal Yayınları, 1999.
3) Z.E., Günal, *Dostoyevski'nin "Kapitali"*, http://www.tsadergisi.org.

BU YARIŞMAYI KAZANABİLİR MİSİNİZ?

Gerçeküstü sayılabilecek bu yarışmada iki kişilik bir ekip yarışıyor. Yarışmacılardan birinin kulağına pozitif bir tamsayı, diğerinin kulağına da bu sayının ardışığı (bir eksiği ya da bir fazlası) olan pozitif tamsayı fısıldanıyor. Aralarında iletişim kurmalarına izin verilmeyen yarışmacılardan gong sesini duyduklarında birbirlerinin sayılarını tahmin etmeleri isteniyor. Gong bir dakika arayla çalıyor ve tahminlerini sadece gong çaldıktan sonra açıklayabiliyorlar, ama kaçıncı gong sesinde açıklama yapacaklarına kendileri karar veriyor, yani sessiz kalma hakları var. Örneğin gongun ilk elli çalışında sessiz kalıp, elli birincide birbirlerinin sayılarını söyleyebilirler. Yanlış yanıt verdiklerindeyse yarışmayı kaybediyorlar.

Bu yarışmaya mantık problemlerine meraklı bir arkadaşınızla katılsanız şansınıza güvenmeden her defasında kazanabilir misiniz?

Şansınıza güveniyorsanız ve çok çok çok şanslıysanız, herhangi iki ardışık pozitif tamsayıyı atarak tutturur, ilk gong sesinden sonra kazanırsınız, ama

$$\{1, 2, 3, \ldots n\}$$

kümesinde n'yi sonsuza götürdüğümüzde belli ardışık iki sayıyı

bulma olasılığı sıfıra yaklaşıyor. Şans faktörü yok denebilecek kadar zayıf. Peki, bu yarışmayı daima kazanabilir miyiz? Yarışmacılar birbirlerinin sayılarını bulabilmek için nasıl bir yol izlemeliler?

Sorudaki püf noktasının gong sesi olduğunu fark etmişsinizdir sanırım. Eğer yarışmacıların gong çaldığında susma hakları bulunmasaydı, aralarında iletişim kurmalarına da izin verilmediğinden yarışmayı kazanmaları neredeyse imkânsız olacaktı. Ama gong sesi sayesinde sorunun güzel bir çözümü var, üstelik hoş bir matematiksel sürprizle karşılaşacağız: Tümevarımla kanıt!

Çözüm. Yarışma ekibi A ve B gibi iki kişiden oluşsun. Çözümün ilk ve basit adımı olarak, A'nın kulağına 1, B'nin kulağına da 2 sayısının fısıldandığını varsayalım. Bu durumda yarışmacılar çok kolay kazanır, çünkü A, kendisine 1 söylendiği için B'nin sayısının 2 olduğunu bilir ve ilk gong sesinin ardından B'deki sayının 2 olduğunu açıklar.

A'ya 2, B'ye de 3 sayısının söylendiğini varsayarsak: İlk gong sesinden sonra sessizlik olacaktır. Çünkü A, B'deki sayının 1 ya da 3 olduğunu bildiğinden, B'nin ilk gong sesinden sonra herhangi bir açıklama yapıp yapmayacağına bakacak ve şöyle düşünecektir: *Eğer B'de* 1 *olsaydı ilk gong çaldığında bendeki sayının* 2 *olduğunu söyleyecekti, ama sustuğuna göre demek ki B'ye* 1 *değil* 3 *sayısı söylenmiş.* Böylece A'nın ikinci gong sesinden sonra B'deki sayının 3 olduğunu söylemesiyle yarışmayı kazanır.

A'ya 3, B'ye de 4 sayısının fısıldandığını varsayarsak: Bu kez ilk gong sesinden sonra sessizlik olacaktır, çünkü söylenen sayıların 1 ve 2 olmadığını biliyorlar. İkinci gongta da ses çıkmaz, ama A üçüncü gongtan sonra açıklamasını yapar. Şöyle düşünmüştür: *B'ye ya* 2 *ya da* 4 *söylendi. Eğer B'ye* 2 *sayısı söylenmişse, o zaman B ikinci gongtan sonra açıklamasını yapardı, çünkü bende 1 olmadığını bildiği için* 2 *diyecekti.*(A'ya 2, B'ye 3 söylendiği bir önceki durumda A'nın yaptığı gibi.) *Ama B, ikinci gongtan sonra sustuğuna göre demek ki ona* 2 *değil,* 4 *sayısı söylenmiş.* Böylece A üçüncü gongtan sonra B'deki sayının 4 olduğunu bilir ve kazanırlar.

Dikkat edilirse, A'ya 3, B'ye 4 sayısının söylenmesi durumunda ikinci gongtan sonra A'nın susma nedeni, B'de 2 olduğunu varsaydığında kendisinin pozisyonunun, bir önceki durumda, yani A'ya 2, B'ye 3 söylendiğindeki B'nın pozisyonuyla aynı olmasından kaynaklanıyor. Bu şekilde düşünerek $A(4) - B(5)$ durumunda üçüncü gong çaldığında da sessizlik olacaktır, çünkü o an, $A(3) - B(4)$durumuna göre A, B'nin, B de A'nın pozisyonunda bulunuyor.

$A(4) - B(5)$ durumunda dördüncü gong çaldığında A açıklamasını yapıyor ve kazanıyorlar. Bu akıl yürütmeyi sürdürürsek $A(5) - B(6)$ durumunda da ilk dört gong sesinde susacaklar ve A beşinci gong sesinden sonra B'ye söylenen sayıyı söyleyerek yarışmayı kazanacaklar. Bu şekilde devam edersek $A(6) - B(7)$ durumunda da $A(5) - B(6)$'daki gibi düşünerek altıncı gong sesinden sonra A, B'nin sayısını bilecektir. Bu düşünceyle diğer bütün durumlar için A'nın kaçıncı gong sesinden sonra B'deki sayıyı bilebileceğini söyleyebiliriz.

Bu yöntemi genelleştirirsek şu sonuca ulaşırız: $A(n) - B(n+1)$ durumunda ilk $n-1$ gong sesinden sonra susan yarışmacılardan A, n'ninci gong sesinin ardından B'ye söylenen sayıyı açıklayarak A – B ekibi yarışmayı kazanmış olacaktır.

Şimdi burada duralım, kendimize şu soruyu soralım: Problemi çözdük mü? Evet, sezgisel olarak ulaştığımız bir çözüm var elimizde ama maalesef matematiksel değeri çok zayıf. Çünkü hiçbir matematikçi yukarıda $A(n) - B(n+1)$ durumu için çıkardığımız sonucu kabul etmeyecektir. Bir matematikçi için bir önermenin ilk altı durum için sağlanıyor olması ve bundan sonraki durumlar için de sezgilerimizle sağlanacağını görmemiz, o önermenin doğru olduğunu göstermez. Sezgilerimizde kuşkucu olmalıyız. Yukarıdaki genel sonuca ulaştığımızı söyleyebilmemiz için gerekli olan matematiksel cihaz kanıttır, adeta kesinliğin belgesi gibi.

İmdadımıza yetişen yöntem: Tümevarımla kanıt!

$A(n) - B(n+1)$ durumu için ulaştığımız sonucu matematikte *tümevarım yöntemi* adı verilen yolla kanıtlayabiliriz. Tümevarım-

la kanıt, domino taşlarından birine dokunulmasıyla tüm taşların yıkılmasına benzetilir. n pozitif bir tamsayı olmak üzere önermesinin doğruluğunu kanıtlamak için aşağıdaki iki adım izlenir:

Adım 1. A_1 önermesinin doğru olduğu gösterilir.

Adım 2. A_n önermesinin doğru olduğu varsayılarak A_{n+1} önermesinin doğru olduğu gösterilir.

Adım 2'yle A_n önermesinin doğruluğu kanıtlanmış olur. Bu yöntemde, A_{20}'nin doğru olduğunu A_{19}'un doğru olduğundan hareketle gösteririz. Aynı şekilde A_{19}'un doğru olduğu A_{18}'in doğruluğundan yola çıkılarak gösterilir. Bu şekildeki adımlarla A_1'in doğruluğuna kadar gelebiliriz. Böylece A_1 doğru olduğundan A_{20} de doğrudur. Bu yüzden önce A_1'in doğru olduğu gösterilir. Adım 2'yle de A_{n+1} önermesinden adım adım A_1'e kadar gelinebileceği gösterilmiş olur. Tıpkı A_{n+1} numaralı domino taşına dokunduğumuzda A_1'e kadar olan taşların yıkılması gibi.

Şimdi tekrar probleme dönelim ve ulaştığımız sonucu teorem olarak yazıp tümevarımla kanıtlayalım.

Teorem. *$A(n) - B(n+1)$ durumunda ilk $n-1$ gong sesinden sonra susan yarışmacılardan A, n'ninci gong sesinin ardından B'ye söylenen sayıyı bilir.*

Kanıt: Yazının başında teoremin $n = 1$, hatta 2 ve 3 için kanıtını yapmıştık. Adım 1'i geçiyoruz.

Adım 2: Teoremin n için doğru olduğunu varsayıp, $n+1$ için doğru olduğunu kanıtlayalım. Teorem, n için,

"$A(n) - B(n+1)$ durumunda ilk $n-1$ gong sesinden sonra susan yarışmacılardan A, n'ninci gong sesinin ardından B'ye söylenen sayıyı bilir." diyor.

Burada n yerine $n+1$ yazarsak,

$A(n+1)-B(n+2)$ durumunda ilk n gong sesinden sonra susan

yarışmacılardan A, n+1'inci gong sesinin ardından B'ye söylenen sayıyı bilir.

Bu durumda A, B'deki sayının *n* veya *n*+2 olacağını düşünür. Eğer *n* ise, B'yi A'nın pozisyonunda düşünelim. Bu durumda teoremi *n* için doğru varsaydığımızdan B, *n*'ninci gong sesinden sonra A'daki sayıyı açıklamalıydı, ama kendisine *n*+2 söylendiğinden *n*'ninci gong sesinden sonra sessiz kalır. Bu durumda A, *n*'ninci gong sesinden sonra B'deki sayının *n* olmadığını anlar ve *n*+1'inci gongtan sonra B'ye *n*+2'nin söylendiğini bilir. Böylece Adım 2 ve teorem kanıtlanmış olur.

ÖKLİD OYUNU

Kâğıt kalemle ve iki kişiyle oynanan bir oyun: Kâğıda birbirlerinden farklı herhangi iki pozitif tamsayı yazılıyor. İlk oyuncu, küçük sayının herhangi bir pozitif tam katını dilediğince alıp büyük sayıdan çıkarıyor, ama bu fark negatif olamıyor. Farktan elde ettiği bu sayıyla birlikte oyun başında yazılan iki sayıdan küçüğünü kâğıda yazıyor. Artık oyun bu iki sayıyla oynanıyor. Bu kez ikinci oyuncu, son iki sayıya aynı kuralları uygulayıp iki sayı daha yazıyor. Daha sonra sıra birinci oyuncuya geçiyor ve bu şekilde devam eden oyunda sıfır sayısını bulan oyuncu kazanıyor.

Örneğin aşağıda *A* ve *B* gibi iki oyuncunun oynadığı, 51 – 30 sayı çiftiyle başlayan bir oyun görülüyor.

51–30

A : (30,21)
B : (21,9)
A : (9,3)
B : (3,0)

Bu durumda *B* kazanıyor. Ama aynı sayı çiftiyle başlayan aşağıdaki oyunda bu kez *A* kazanıyor, çünkü ikinci hamlesini değiştiriyor.

51–30

A : (30,21)
B : (21,9)
A : (12,9)
B : (9,3)
A : (3,0)

Kâğıda yazılan tüm sayılar ilk sayı çiftinin ortak bölenlerinin en büyüğünün tamsayı katı olduğundan oyun, adını Öklid algoritmasından alıyor.

Yukarıdaki örneklerden, bu oyunda bir kazanma stratejisinin olabileceğini anlıyoruz. Öte yandan, "iki kişi arasında oynanan sonlu bir oyunda saklı bilgi yoksa ve beraberlik söz konusu değilse iki oyuncudan birinin kazanma stratejisi vardır" önermesinin oyun teorisinde bir teorem olduğunu da biliyoruz. Öklid oyununda da bu teorem gereği ilk oyuncunun bir kazanma stratejisi var. Bu strateji için A. J Cole ve A. J. T Davie tarafından yazılan ortak makalede [1] şu teorem kanıtlamış: *Sayı çifti için ilk oyuncunun yalnız ve yalnız*

$$\frac{a}{b} > \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

için bir kazanma stratejisi vardır.

Bu teoremi kanıtlayıp oyunun analizini yapacağız. Ama önce, teoremi kanıtlarken gerekecek bir problemi ve bir önermeyi ele alalım.

Problem. a ve b pozitif tamsayılar, $b < a < 2b$ olmak üzere,

$$a < kb \text{ ise } b > k(a-b) \quad \text{(I)},$$
$$a > kb \text{ ise } b < k(a-b) \quad \text{(II)}$$

önermelerini sağlayan k sabitini bulunuz.

Çözüm. Bu eşitsizliklere göre k pozitif bir reel sayı olmak zorunda. (I) önermesinin sol tarafındaki eşitsizliğin her iki tarafını k ile çarpıp, bk çıkarırsak,

$$k^2b-bk > k(a-b)$$

olur. (I) önermesinin sağ tarafındaki eşitsizliğe bakarsak, yukarı-

da elde ettiğimiz eşitsizliğin sol tarafı b'ye eşit olmak zorundadır:

$$k^2b-bk = b.$$

Bu denklemden k pozitif reel sayısı

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

bulunur.

(II) önermesinden de benzer yolla aynı k değerini buluruz.

Bulduğumuz k değerine (altın oran) göre yukarıdaki problemi bir önsav olarak yazabiliriz.

Önsav: a ve b pozitif tamsayılar, $b < a < 2b$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlikler

$$k = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

değeri için doğrudur

$a < kb$ ise $b > k(a-b)$ (I)

$a > kb$ ise $b < k(a-b)$ (II).

Şimdi, yazıyı buraya kadar okuma sabrını gösteren okurun ödülünü alacağı bölüme geldik. Daha önce sözünü ettiğimiz teoremin akıl dolu kanıtını vereceğiz.

Teorem. *(a, b) sayı çifti için ilk oyuncunun yalnız ve yalnız* a>kb *için bir kazanma stratejisi vardır.*

Kanıt. Bu kanıtta sayı çiftlerini yukarıda da yazdığımız gibi $a > b$ olmak üzere (a, b) ikilisiyle göstereceğiz.

Oyun (a, b) sayı çiftiyle başlamışsa, t tamsayı olmak üzere $a = tb$ ise ilk oyuncu kazanır.

Şimdi, $a \neq tb$ için teoremin doğru olduğunu varsayalım, yani $a > kb$ için ilk oyuncunun bir kazanma stratejisi olsun. Daha sonra teoremin yanlış olduğu durumu da inceleyeceğiz.

$a > kb$ iken $a > qb$ eşitsizliğini sağlayan en büyük q tamsayısını bulmaya çalışalım.

Eğer $q = 1$ ise ilk oyuncunun tek hamlesi vardır. Örneğin oyun, (30,21) sayı çiftiyle başlıyorsa $q = 1$'dir ve ilk oyuncu (21,9) hamlesini yapmak zorundadır. (a, b) ikilisi için bu hamle

$(b, a–b)$ dir. Bu durumda Önsav (II) gereği $b < k(b–a)$ olduğundan ilk oyuncu kazanır, çünkü bundan sonra ikinci oyuncu $(b, a–b)$ ikilisi üzerine oynayacağından birinci oyuncunun yerine geçmiş olacağından başlangıçtaki kabule (büyük sayı küçüğün k katından büyüktür) göre kaybeder.

Eğer, $q \geq 2$ ise ilk oyuncu için aşağıdaki hamleler söz konusudur:

$(a, b) \rightarrow (b, a–qb)$ (I) veya

$(a, b) \rightarrow (a–(q–1)b, b)$ (II).

Örneğin oyun (36, 14) sayı çiftiyle başlamışsa ilk oyuncu (I) hamlesine göre (14, 8) veya (II) hamlesine göre (22, 14) sayı çiftlerini oynayabilir. (Bu oyunun başlangıcında en büyük q tamsayısı 2.)

Bu durumda ilk oyuncu, ikinci oyuncuyu etkisizleştirmek için (a, b) sayı çiftine bakar, eğer $b < k(a–qb)$ ise (I) hamlesini, $b > k(a–qb)$ ise (II) hamlesini yapar. İlk oyuncu $b<k(a–qb)$ iken (I) hamlesini yapıyor çünkü, ikinci oyuncu $(b, a–qb)$ sayı çiftiyle oynayacağından başlangıçtaki kabule göre kaybeder. (II) hamlesiyle kazanabilmesi için yine başlangıçtaki kabule göre $a–(q–1)b < kb$ olmalı.

Kanıtlayalım:

$b > k(a–qb)$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitsizliğin her iki tarafını k'ye böler, sonra da her iki tarafa b ekleyerek düzenlersek,

$$a-(q-1)b<(\frac{1}{k}+1)b$$

olur. $k^2 = k+1$ olduğunu biliyoruz.

Buradan,

$$a–(q–1)b < kb$$

elde edilir. Bu durumda ilk oyuncu kazanır, çünkü yaptığı hamleyle ikinci oyuncuyu $a'<kb'$ eşitsizliğiyle baş başa bırakır. Bu durumda ikinci oyuncunun, Önsav'a göre

$$a' < kb' \text{ ise } b' > k(a'–b')$$

olacağından şu hamleden başka bir seçeneği kalmaz:

$$(a', b') \rightarrow (a'-b', b').$$

Bu durumda da ikinci oyuncu kaybeder.

Şimdi varsayalım ki $a < kb$ olsun. Bu durumda ilk oyuncunun Önsav'a göre

$$a < kb \text{ ise } b > k(a–b)$$

olacağından şu hamleden başka bir seçeneği yoktur:
$(a, b) \to (a–b, b)$. Tabii ki, bu durumda ilk oyuncunun kazanma stratejisi olamaz.

Böylece teorem kanıtlanmıştır.

İlk oyuncunun kazanma stratejisi

Sonuç olarak, $q \geq 2$ için ilk oyuncunun kazanma stratejisini şöyle ifade edebiliriz: Varsayalım ki $a > kb$ ve q, $a > qb$ eşitsizliğini sağlayan en büyük tamsayı olsun. İlk oyuncu,

$$(b, a–qb) = (a', b') ,$$
$$(a–(q–1)b, b) = (a', b')$$

hamleleri arasında $a < kb'$ olacak şekilde bir seçim yapar. Çünkü (a', b') çifti ikinci oyuncunun oynayacağı sayılardır ve $a' < kb'$ olduğunda kaybedecektir.

Bu oyunun başlangıcında ve sonrasında karşımıza çıkan sayıların oranının

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

den büyük olup olmadığına bakmak pek pratik olmayabilir, ama biz oyunun analizindeki matematikten aldığımız tatla ilgileniyoruz. Basit bir sayı oyunundan hareketle altın oranla karşılaşma ilginçliğini de yaşayarak yapılan akıl dolu bir yolculuk.

Örneğin birbirine çok yakın başlangıç sayılarına sahip aşağıdaki oyunların ilkinde büyük sayının küçüğüne oranı

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

den büyük ve ilk oyuncu doğru stratejiyle kazanıyor, diğer

oyunda ise bu oran

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

den küçük ve ilk oyuncu kaybediyor.

50–29

A : (29,21)
B : (21,8)
A : (8,5)
B : (5,3)
A : (3,2)
B : (2,1)
A : (1,0)

50–31

A : (31,19)
B : (19,12)
A : (12,7)
B : (7,5)
A : (5,2)
B : (3,2)
A : (2,1)
B : (1,0).

KAYNAKLAR

1) Cole, A. J ve Davie, A. J, "A game based on the Euclide analgorithm and a winning strategy for it", *Mathematical Gazette*, 53, 1969.
2) https://eudml.org/doc/128031. Collins, D, *Variations on a theme of Euclid*, 2005.

Yanıtlar

SEZGİLERİNİZE GÜVENEBİLİR MİSİNİZ?

Yanıt 1. Dokuz yüz yıldan fazla bir zaman alacağına inanır mısınız?

Yanıt 2. Şapkadan çekilen kartın diğer yüzününde kırmızı olma olasılığı 2/3'tür.

Yanıt 3. Bu soru "mantıksal bir paradokstur", yanıt verilemez.

Yanıt 4. Eşit miktardadırlar.

Yanıt 5. Grupta en az 23 kişi olmalıdır.

Yanıt 6. İnanılır gibi değil! Amerikalı matematikçi Peter Casazza'nın yaptığı hesaplara göre, eğer bilgisayar saniyede 1 milyon işlem yapar ve 5 milyon yıl hiç aralıksız çalışırsa topu topu 191 sayısına ulaşmış oluyor.

Yanıt 7. Bu sayıyı yazmak için 1600 kilometreden daha uzun bir kâğıt gerekiyormuş!

Yanıt 8. Saat tam olarak 8.24'tür.

Yanıt 9. Ne kadar hızlı dönerlerse dönsünler ortalama hızı iki katına çıkaramazlar; çünkü bu durumun gerçekleşmesi için zamanın sabit kalması gerekir ki, bu da mümkün değildir.

Yanıt 10. Yarışmacı seçimini değiştirirse otomobilin sahibi olma olasılığını iki katına çıkarır.

Yanıt 11. Bütün bilyeler A'da toplanır, B'de hiç bilye kalmaz.

Yanıt 12. İki arkadaşın buluşma olasılığı yaklaşık yüzde 30,5'tur.

"YANLIŞIMI BUL!"

Soru 1- $x = m + n$ verilen denklemin kökü olduğundan $x - (m + n) = 0$ olur. Dördüncü satırdan beşinci satıra geçerken eşitliğin iki yanı x-(m+n) ile bölünmüştür. Sıfırla bölme "tanımsız" olduğundan yanlış yapılmıştır.

Soru 2- Altıncı satırdaki eşitlikte mutlak değer kullanılmadığından hata yapılmıştır.

Soru 3- Yine mutlak değer dikkate alınmadığı için yapılan bir yanlış.

Soru 4- $\log\frac{1}{2}$ negatif bir reel sayı olduğundan 3 ile çarpıldığında büyümez, küçülür. Hata ikinci satırdadır.

Soru 5- Birinci satırdan ikinci satıra geçerken kesirli ifadenin ortadan kaldırılmış olması başlangıçtaki denklemin sol tarafında bulunan fonksiyon ile sonradan elde edilen fonksiyonun tanım kümelerini farklılaştırdığından -2 ilk denklemin kökü değildir.

Soru 6- Bu soruda da 5. sorudaki gibi birinci satırdan ikinci satıra geçerken elde edilen fonksiyonla başlangıçtaki denklemin sol tarafındaki fonksiyonun tanım kümeleri farklı olduğundan ne 1 ne de –1 başlangıçtaki denklemin kökü değildir.

Soru 7- Birinci satırdan ikinciye geçerken yapılan iki yanın karesini alma işlemi denklemin sol tarafındaki fonksiyonunun tanım kümesini genişlettiğinden $\mathrm{Sin}x+\mathrm{Cos}x = -1$ denkleminin kökleri de bulunmuştur.

Soru 8- İkinci satırdan üçüncüsüne geçerken yine başlangıçtaki fonksiyonun tanım kümesi değiştiğinden ilk denklemi gerçeklemeyen kökler bulunmuştur.

Soru 9- İkinci satırdan üçüncüye geçerken eşitliğin iki yanının küp kökü alınmış ve –1'in küp kökü –1'e eşitlenmiştir. Oysa karmaşık sayılarda –1'in küp kökü sadece –1 değildir, diğer köklerden biri olan $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ sayısı alınmadığından yanlış yapılmıştır.

Soru 10- Verilen sonsuz toplamlar sonlu bir sayıya yakınsamadıkları için bu toplamları x ve y gibi harflerle gösterip sonlu toplamlar için geçerli olan işlemleri yapmak yanlıştır.

Soru 11- Verilen eşitlikte "x", sayma sayısı olarak tanımlanmıştır. Oysa türevin tanımı limite dayanır ve bir fonksiyonun limitini almak yakınsama sürecini gerektirir. "x" in sayma sayısı olması bu süreci engellediğinden yanlış yapılmıştır.

Soru 12- İntegral sabitleri yazılmadığından hata oluşmuştur. Yazılı sınavlarda integral sabitinin yazılmaması nedeniyle puan kırılmasının ne kadar doğru olduğunu gösteren güzel bir örnek.

Soru13- Şekilde çizim yanlışlığı yapılmıştır. Doğru çizim yapıldığında IE doğru parçası dikdörtgenin kenarlarını kesmez. Bu durumda IDE açısının ölçüsü 180°'den büyük olur. Oysa verilen şekilde bu açının ölçüsü 180°'den küçüktür. Bundan dolayı doğru tanıtlamalar yapıldığı halde yanlış sonuçlar bulunmuştur.

"PROBLEM ÇÖZMEK GÜZELDİR!"

Gazoz Kapakları: Fırat, 149 kapakla toplam 49 gazoz içebilir. Şöyle ki; 4 kapağa 1 adet bedava gazoz verildiğinden 149 kapakla 37 gazoz içer ve elinde 1 kapak artar. Bu 37 kapakla 9 gazoz daha içer, elinde 1 kapak daha artar. 9 gazoz ile 2 gazoz daha içer ve 1 kapak daha artar. Son 2 gazozu da içtikten sonra, bu 2 kapağı daha önce artan 3 kapağa ekleyerek 1 gazoz daha içer. (37+9+2+1 = 49)

Barmen kokteyl hazırlıyor: Bu soru karışım problemlerindeki gibi denklem kurarak çözülebilir, ama hiç gerek yok; çünkü son durumda vermut şişesindeki cinle, cin şişesindeki vermutun aynı miktarda olduğunu kanıtlamanın basit bir yolu var: Yapılan işlemler sonunda vermut şişesinde x litre cin olsun. Her iki şişedeki karışım miktarları başlangıçtaki kadar olduğuna göre vermut şişesinden x litre vermut azalmış demektir. O halde bu azalan x litre kadar vermut da cin şişesindedir.

Öğrencilerin son şansı: Öğrencilerin isimleri A, B, C olsun. A şöyle düşünür: "B ve C'nin ikisinin de sırtında kırmızı kart var. Benim sırtımdaki kart mavi olsaydı B ceza almazdı; çünkü o zaman B şöyle düşünecekti: 'A'nın kartı mavi, C'nin ise kırmızı. Eğer benim sırtımdaki kart da mavi olsaydı C, karşısında iki mavi kart gördüğünden kendi kartının kırmızı olduğunu anlardı. C'nin sesi çıkmadığına göre benim sırtımdaki kart mavi değil kırmızı.' B, bu şekilde düşünerek "sırtımdaki kart kırmızı" diyerek ceza almaktan kurtulurdu. B'nin sesi çıkmadığına göre benim sırtımdaki kart mavi değil kırmızı."

Üç öğrenci de A'nın vardığı sonuca, A gibi akıl yürüterek aynı zamanda ulaşırlar ve üçü de ceza almaz. Eğer öğrencilerden herhangi biri diğer ikisinden önce bu sonuca varsaydı, o diğer iki kişi ceza alabilirdi; çünkü o zaman sonuca ulaşan kişi karşısında bir kırmızı bir mavi kart görmüş olacağından diğerleri sırtlarındaki kartların rengini kesin olarak bilemeyeceklerdi.

Lewis Carroll Problemi: Başlangıçta torbada bulunan beyaz topu B_1, siyah topu S ve torbaya sonradan koyulan beyaz topu da B_2 ile gösterelim. Torbadan bir beyaz top çektikten sonraki mümkün haller şunlardır:

1. Durum: B_1 torbanın içinde, B_2 torbanın dışında. **2. Durum:** B_2 torbanın içinde, B_1 torbanın dışında. **3. Durum**: S torbanın içinde, B_2 torbanın dışında. Görüldüğü gibi torbadan bir beyaz top çekildikten sonraki 3 durumdan ikisinde torbada bir beyaz top kalıyor, aradığımız olasılık 2/3.

İşçi biliyor şef şaşırıyor: Sönmez, önce kutuları 1'den 6'ya kadar numaralandırır. Önceki problemi çözerken kullandığı yöntemi bu probleme de uygular, ama bu kez on tabanında değil iki tabanında çalışır. Bu yüzden ilk kutudan 1, ikinciden 2, üçüncüden 4, dördüncüden 8, beşinciden 16 ve altıncıdan 32 bilye alır. Kutulardan alınan bilyelerin sayısı (1, 2, 4, 8, 16, 32) 2'nin kuvvetleridir ve bu sayıların toplamı 63'tür. Bir bilye 1 gram olması gerektiğinden Sönmez'in kutulardan aldığı 63 bilyenin ağırlığı 63 gramdan fazladır. Sönmez 63 bilyeyi tartarak fazladan ağırlığı bulur.

Fazladan ağırlığı gösteren sayıyı iki tabanında yazar ve bu sayıyı sağdan sola doğru numaralandırır. Bu sayıda 1'lerin bulunduğu hanelerin numarası hatalı bilyelerin olduğu kutuları gösterir. Örneğin 19 gram fazla çıktı diyelim. 19 sayısı iki tabanında 10011 dir. Bu sayıdaki rakamları sağdan sola doğru numaralandırırsak hatalı bilyeler birinci, ikinci ve beşinci kutularda bulunuyor demektir.

Biyologları telaşlandıran bakteri: Bir bakteri, bir saatte 5 bakteriye dönüşüyordu. Asistan, kabın 1/5'inin 20–1 = 19 saatte dolacağını hesaplamıştı. Kaba 5 bakteri bırakıldığında da çoğalma aynı döngüde olacağından aynı akıl yürütmeyi bu soruda da kullanırsak kabın 1/5'i 19–1 = 18 saatte dolacaktır.

DİZİN

Abbott, E., 140, 148, 161
Akgül, Tayfun, 26
Akyıldız, Yılmaz, 90
Allan, Edgar, 148
Altıok, Metin, 68
Arf, Cahit, 31, 108
Asimov, Isaac, 259
Atay, Oğuz, 147
Ayfer, Reyyan, 30
Banach, Stefan, 232
Bell, E. T., 245
Berk, İlhan, 148
Bernoulli eşitsizliği, 58
Bernoulli, Jacob, 213
Bernoulli, John, 112, 213
Bernoulli, Nicolaus, 213
Blaise, Pascal, 184
Bolyai, 156, 172
Born, Max, 138
Bourbaki, N., 113
Büyük Fermat Teoremi, 24
Cabart Michel, 118
Cansever, Edip, 70
Cantor, Georg, 190, 196
Cardano, Gerolamo, 184
Carroll, Lewis, 261, 265, 301
Casazza, Peter, 299
Cassini, 267
Cauchy - Schwarz eşitsizliği, 59
Cebirin Temel Teoremi, 39
Cole, A. J., 293
Conway, John Horton, 63
Crilly, Tony, 134
Curry, Paul, 269
Dantzig, George, 130
Davie, A. J. T., 293
Dirac, Paul, 212
Dostoyevski, 50, 147, 154, 281
Dudeney, Henry, 169
Eco, Umberto, 148
Einstein, Albert, 136
Eloğlu, Metin, 35
Erdös, Paul, 115, 140, 223
Euler sabiti, 218
Euler, 83, 110, 213, 245
Fermat, 185
Fibonacci, Leonardo, 266
Fleischer, Leonore, 219
Frederickson, G. N., 175
Frege, 44
Gale, David, 274
Galois, 23
Gardner, Martin, 206, 269, 274, 278
Gauss, Carl, Friedrich, 24, 39, 135, 156, 245
Genel Görelilik Teorisi, 136
Gentzen, Gerhard, 113
Goldbach sanısı, 25, 148
Gödel, 22
Grandi serisi, 83
Gross, Oliver, 275
Guedj, Denis, 148
Güncü, Fırat, 11
Günersel, Tarık, 136
Hardy, G., 34, 86, 177
Harmonik seri, 99

Hasipoğlu, Yılmaz, 72
Hawking, Stephen, 137
Helvacıoğlu, Ender, 12
Hidetoshi, Fukagawa, 117
Hilbert, David, 196
Hooke, Robert, 236
Hugo, Victor, 151
Huygens, Christian, 236
İnan, Mustafa, 149
Jones, William, 114
Kelland, Philip, 173
Kemal, Yaşar, 108
Kinşan, Oğuz, 12
Klein şişesi, 24
Korkmaz, Aslı Can, 12
Koşullu önerme, 105
Kramp, Christian, 113
Knuth, Donald E., 63
Kümeler kuramı, 44
Langlands, Robert, 23
Leibniz, 83, 110, 112
Lobachevsky, 156
Maclaurin, 246
Maier, Helmut, 142
Masanori, Ehara, 118
Matematiksel beklenti, 281
Minkowski, 139
Mitsukuni, Saito, 120
Modus ponens, 36
Naonobu, Ajima, 120
Nelsen, Roger B., 49
Nesin, Ali, 4, 9, 24, 42, 220
Newton, 236, 245
Okar, Baha, 12
Orwell, George, 148
Ostrovsky, A. N., 39
Oughtred, William, 112
Öklid geometrisi, 31, 36, 75, 117, 137, 155
Öklid, 35
Öztürkçü, Deniz, 11
Pacioli, Luca, 184
Paralelik Aksiyomu, 39
Peano, Giuseppe, 44, 110
Pedeo, Dan, 117
Pell denklemi, 181
Perelman, 40
Pisagor Teoremi, 38, 48, 148, 266
Pisagor, 38
Poe, 148
Poincare sanısı, 40
Posa, Louis, 143
Ramanujan, S., 86, 141, 177
Recorde, Robert, 112
Riemann geometrisi, 137
Riemann uzayı, 137
Riemann zeta fonksiyonu, 89
Riemann, Bernhard, 135, 156
Rom, Graham, 142
Rothman, Tony, 116
Rudolff, Kristof, 112
Russell, Bertrand, 33, 106, 111
Shakespeare, 245
Snow, C. P, 177
Struik, Dirk, J., 246
Süreya, Cemal, 48
Sürreel sayılar, 63
Sylvester, J. J., 240
Tales, 38
Taner, Haldun, 32
Teklik Teoremi, 21
Törün, Aslı, 12
Törün, Elif, 11
Törün, Mediha, 7
Törün, Olcay, 12
Törün, Oya, 12
Uran, Cem, 11, 132
Uyar, Turgut, 148
Varlık Teoremi, 21
Vazsonyi, Andrew, 224
Von Neumann, John, 254
Vos Savant, Marilyn, 219
Wallis, John, 113
Wason, P.C., 102
Weber, Wilhelm, 135
Weil, Andre, 113
Whiston, William, 236
Whitehead, Alferd North, 110, 212
Wiener, Norbert, 15
Yağcı, Mustafa, 72